レーダ反射因子と降雨強度との関数関係の解析

慶應　理工　吉井 めぐみ
慶應　理工　清水 邦夫

1　はじめに

気象レーダ観測で得られるレーダ反射因子 Z と，地上で計測される降雨強度 R との関係に着目していく．

降雨強度 R とは，単位時間あたりの降雨量のことである．単位としては，[mm/h] を用いる．R を数式で表すことを考える．仮定として，以下を考える．

- 雨滴粒子は，球形とする．その直径は，D[mm] とおく．
- 雨滴粒形分布を $N(D)[\mathrm{mm}^{-1}/\mathrm{m}^3]$ とする．
- 雨滴粒子の海面高度での終端速度を $v(D)$[m/s] とする．

すると，

$$R = 6 \times 10^{-4}\pi \int_0^\infty D^3 v(D) N(D)\, dD$$

となる．次に，レーダ反射因子 Z をレイリー領域内にある雨滴に対して定義は，

$$Z = \int D^6 N(D)\, dD$$

とし，単位は，$[\mathrm{mm}^6/\mathrm{m}^3]$ となる．

R と Z の関係をつけるために，以下を仮定する．

- 雨滴粒形分布 $N(D)$ を，ガンマ分布とする．つまり，$N(D) = N_0 D^\mu \exp(-\Lambda D)$ とする．
- 終端速度 $v(D)$ に冪乗関係 $v(D) = \gamma D^\delta$ とする．

よって，

$$\begin{aligned} R &= 6 \times 10^{-4}\pi\, \gamma\, N_0 \int_0^\infty D^{\delta+\mu+3} \exp(-\Lambda D)\, dD \\ &= 6 \times 10^{-4}\pi\, \gamma\, N_0\, \Gamma(\delta+\mu+4)\, \Lambda^{-(\delta+\mu+4)} \end{aligned}$$

となり，

$$\Lambda = \left\{6 \times 10^{-4}\pi\, \gamma\, N_0\, \Gamma(\delta+\mu+4)\right\}^{1/(\delta+\mu+4)} R^{-1/(\delta+\mu+4)} \equiv \alpha R^\beta$$

を得る．したがって，

$$\begin{aligned} Z &= N_0 \int_0^\infty D^{\mu+6} \exp(-\Lambda D)\, dD \\ &= N_0\, \Gamma(\mu+7)\, \Lambda^{-(\mu+7)} \\ &= N_0\, \Gamma(\mu+7)\, \alpha^{-(\mu+7)}\, R^{-\beta(\mu+7)} \equiv kR^l \end{aligned}$$

つまり，

$$\begin{aligned} k &= N_0\, \Gamma(\mu+7)\, \alpha^{-(\mu+7)} \\ l &= -\beta(\mu+7) \end{aligned}$$

となる．これより，Z と R の間には冪乗関係 $Z = kR^l$ が成立していることがわかった [4]．この関係は，Z–R 関係と呼ばれている．

熱帯降雨の降雨強度 R については，対数正規分布 $LN(\mu_R, \sigma_R^2)$ の適合の良さが知られている．σ_R^2 は，対数正規分布での型パラメータと呼ばれ，降雨の種類や観測領域等によって適切に層別を行えば，ほぼ一定値をとることがしられている．また，R に対数正規分布を仮定すれば，冪乗関係より Z も対数正規分布となる．Atlas et al. [2] でも対数正規分布を利用してパラメータ k, l の推定を試みている．以下では，Z–R 関係を関数関係モデルとしてとらえ，パラメータ k, l を推定することを考えていく．

2 Model

改めて，以下のような関数関係モデルを考える．

$$Y = \alpha_0 + \alpha_1 X$$

$$\begin{cases} \xi_i = X_i + \delta_i \\ \eta_i = Y_i + \epsilon_i \end{cases} \qquad i = 1, \dots, N$$

ただし，α_0, α_1 は未知パラメータ $(-\infty < \alpha_0, \alpha_1 < \infty)$，$\xi_i, \eta_i$ は観測される値，X_i, Y_i は観測できない値，δ_i, ϵ_i は誤差をあらわしている．

仮定

誤差に対して以下を仮定する．

$$\begin{cases} \mathrm{E}(\delta_i) = \mathrm{E}(\epsilon_i) = 0 \\ \mathrm{Var}(\delta_i) = \sigma_\delta^2 \, (> 0) \\ \mathrm{Var}(\epsilon_i) = \sigma_\epsilon^2 \, (> 0) \\ \mathrm{Cov}(\delta_i, \epsilon_j) = 0 \qquad \forall i, j \\ \mathrm{Cov}(\delta_i, \delta_j) = \mathrm{Cov}(\epsilon_i, \epsilon_j) = 0 \quad i \neq j \end{cases}$$

X を確率変数として以下を仮定する．

$$\begin{cases} \mathrm{Cov}(X, \delta) = \mathrm{Cov}(X, \epsilon) = 0 \\ \mathrm{E}(X) = \mu \, (-\infty < \mu < \infty) \\ \mathrm{Var}(X) = \sigma_x^2 \, (> 0) \end{cases}$$

ξ_i, η_i に添え字 i について独立同分布で 2 変量正規分布を仮定する．つまり，

$$\begin{pmatrix} \xi_i \\ \eta_i \end{pmatrix} \overset{i.i.d.}{\sim} \mathrm{N}_2 \left(\begin{bmatrix} \mu \\ \mu' \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \right)$$

となる．ここで，

$$\mu' = \alpha_0 + \alpha_1 \mu \, , \, a = \sigma_x^2 + \sigma_\delta^2 \, , \, b = \alpha_1 \sigma_x^2 \, , \, c = \alpha_1^2 \sigma_x^2 + \sigma_\epsilon^2$$

である．

3　最尤推定量とその性質

3.1　Case 1

$$\begin{array}{ccc} \xi_1 & \dots & \xi_n \\ \eta_1 & \dots & \eta_n \end{array}$$

記号

$$\overline{\xi} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i\,,\ \overline{\eta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\eta_i$$

$$S_\xi = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - \overline{\xi})^2\,,\ S_\eta = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\eta_i - \overline{\eta})^2\,,\ S_{\xi\eta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - \overline{\xi})(\eta_i - \overline{\eta})$$

パラメータ μ, μ', a, b, c の最尤推定量は,

$$\widehat{\mu} = \overline{\xi}, \quad \widehat{\mu}' = \overline{\eta}, \quad \widehat{a} = S_\xi, \quad \widehat{b} = S_{\xi\eta}, \quad \widehat{c} = S_\eta$$

となる．文献 [3] には，誤差分散 $\sigma_\delta^2, \sigma_\epsilon^2$ に対して条件を入れて $\alpha_0,\ \alpha_1,\ \mu,\ \sigma_x^2,\ \sigma_\delta^2,\ \sigma_\epsilon^2$ の推定をしている．場合としては，以下の４つを考えている．

(1) σ_δ^2: 既知

$S_\xi - \sigma_\delta^2 > 0\,,\ S_\eta \geq S_{\xi\eta}^2/(S_\xi - \sigma_\delta^2)$ の時に最尤推定量は,

$$\widehat{\alpha_1} = \frac{S_{\xi\eta}}{S_\xi - \sigma_\delta^2}, \quad \widehat{\sigma_x^2} = \frac{S_{\xi\eta}}{\widehat{\alpha_1}} = S_\xi - \sigma_\delta^2, \quad \widehat{\sigma_\epsilon^2} = S_\eta - \widehat{\alpha_1}^2\widehat{\sigma_x^2}, \quad \widehat{\mu} = \overline{\xi}, \quad \widehat{\alpha_0} = \overline{\eta} - \widehat{\alpha_1}\widehat{\mu}$$

となる．

(2) σ_ϵ^2: 既知

$S_{\xi\eta} \neq 0\,,\ S_\eta - \sigma_\epsilon^2 > 0\,,\ S_\xi \geq S_{\xi\eta}^2/(S_\xi - \sigma_\epsilon^2)$ の時に最尤推定量は,

$$\widehat{\alpha_1} = \frac{S_\eta - \sigma_\epsilon^2}{S_{\xi\eta}}, \quad \widehat{\sigma_x^2} = \frac{S_{\xi\eta}}{\widehat{\alpha_1}}, \quad \widehat{\sigma_\delta^2} = S_\xi - \widehat{\sigma_x^2}, \quad \widehat{\mu} = \overline{\xi}, \quad \widehat{\alpha_0} = \overline{\eta} - \widehat{\alpha_1}\widehat{\mu}$$

となる．

(3) $\sigma_\epsilon^2/\sigma_\delta^2 = \lambda$: 既知

$S_{\xi\eta} \neq 0\,,\ S_\eta \neq \lambda S_\xi\,,\ 2S_{\xi\eta}^2 \geq S_\eta - \lambda S_\xi + \sqrt{(S_\eta - \lambda S_\xi)^2 + 4\lambda S_{\xi\eta}^2}$ の時に最尤推定量は,

$$\widehat{\alpha_1} = \frac{S_\eta - \lambda S_\xi + \sqrt{(S_\eta - \lambda S_\xi)^2 + 4\lambda S_{\xi\eta}^2}}{2S_{\xi\eta}}, \quad \widehat{\sigma_x^2} = \frac{S_{\xi\eta}}{\widehat{\alpha_1}}$$

$$\widehat{\sigma_\delta^2} = S_\xi - \widehat{\sigma_x^2}, \quad \widehat{\sigma_\epsilon^2} = S_\eta - \widehat{\alpha_1}^2\widehat{\sigma_x^2} = \lambda\widehat{\sigma_\delta^2}, \quad \widehat{\mu} = \overline{\xi}, \quad \widehat{\alpha_0} = \overline{\eta} - \widehat{\alpha_1}\widehat{\mu}$$

となる．

(4) $\sigma_\delta^2, \sigma_\epsilon^2$: 両方とも既知

(1), (2), (3) におけるような最尤推定量を求める方法を直接用いることはできず，尤度関数を直接最大化して，最尤推定量を求める．

以上が，文献 [3] での方法であった．

これからは，$\alpha_0, \alpha_1, \sigma_\delta^2, \sigma_\epsilon^2, \mu$ は未知，σ_x^2 は既知とする．この仮定は，降雨強度 R の分布において型パラメータの値が降雨の種類をうまく層別すれば，ほぼ一定値をとることによる．$S_\xi - \sigma_x^2 > 0$, $S_\eta - S_{\xi\eta}^2/\sigma_x^2 > 0$ の時に最尤推定量は，

$$\widehat{\mu} = \overline{\xi}, \qquad \widehat{\alpha_1} = \frac{S_{\xi\eta}}{\sigma_x^2}, \qquad \widehat{\alpha_0} = \overline{\eta} - \frac{S_{\xi\eta}}{\sigma_x^2}\,\overline{\xi}, \qquad \widehat{\sigma_\delta^2} = S_\xi - \sigma_x^2, \qquad \widehat{\sigma_\epsilon^2} = S_\eta - \frac{S_{\xi\eta}^2}{\sigma_x^2}$$

となる．

最尤推定量の平均と分散は以下のようになる．

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(\widehat{\mu}) &= \mu \\
\mathrm{Var}(\widehat{\mu}) &= \frac{1}{n}a \\
\mathrm{E}(\widehat{\alpha_1}) &= \alpha_1 - \frac{1}{n}\,\alpha_1 \\
\mathrm{Var}(\widehat{\alpha_1}) &= \frac{1}{n}\frac{ac+b^2}{\sigma_x^4} - \frac{1}{n^2}\frac{ac+b^2}{\sigma_x^4} \\
\mathrm{E}(\widehat{\alpha_0}) &= \alpha_0 + \frac{1}{n}\mu\alpha_1 \\
\mathrm{Var}(\widehat{\alpha_0}) &= \frac{1}{n}\left(c - 2\frac{b^2}{\sigma_x^2} + \frac{ab^2}{\sigma_x^4} + \frac{ac+b^2}{\sigma_x^4}\mu^2\right) + \frac{1}{n^2}\left(2\frac{b^2}{\sigma_x^2} + \frac{ac-b^2}{\sigma_x^4}a - \frac{ac+b^2}{\sigma_x^4}\mu^2\right) - \frac{1}{n^3}\frac{a^2c}{\sigma_x^4} \\
\mathrm{Cov}(\widehat{\alpha_0}, \widehat{\alpha_1}) &= -\frac{1}{n}(ac+b^2)\frac{\mu}{\sigma_x^4} + \frac{1}{n^2}(ac+b^2)\frac{\mu}{\sigma_x^4} \\
\mathrm{E}(\widehat{\sigma_\delta^2}) &= \sigma_\delta^2 - \frac{1}{n}a \\
\mathrm{Var}(\widehat{\sigma_\delta^2}) &= \frac{2}{n}a^2 + \frac{2}{n^2}a^2 \\
\mathrm{E}(\widehat{\sigma_\epsilon^2}) &= \sigma_\epsilon^2 - \frac{1}{n}\left(\sigma_\epsilon^2 + \frac{ac}{\sigma_x^4}\right) + \frac{1}{n^2}\frac{ac}{\sigma_x^4} \\
\mathrm{Var}(\widehat{\sigma_\epsilon^2}) &= \frac{2}{n}\left(c^2 - \frac{4b^2c}{\sigma_x^2} + \frac{2b^2}{\sigma_x^4}(ac+b^2)\right) + \frac{2}{n^2}\left(c^2 - \frac{2c}{\sigma_x^2}(ac-b^2) - \frac{1}{\sigma_x^4}(4b^4 + 4ab^2c - a^2c^2)\right) \\
&\quad - \frac{2}{n^3}\left(\frac{b^2c}{\sigma_x^2} - \frac{1}{\sigma_x^4}(31b^4 + 44ab^2c + a^2c^2)\right) - \frac{4}{n^4\sigma_x^4}\left(14b^4 + 21ab^2c + a^2c^2\right)
\end{aligned}$$

最尤推定量は，各パラメータについて一致推定量になる．

3.2 Case 2

$$\begin{array}{cccccc}
\xi_1 & \ldots & \xi_{n_1} & \xi_{n_1+1} & \ldots & \xi_n \\
\eta_1 & \ldots & \eta_{n_1} & & &
\end{array}$$

記号

$$\overline{\xi} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i\,, \qquad \overline{\xi}^* = \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}\xi_i\,, \qquad \overline{\eta}^* = \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}\eta_i\,, \qquad S_\xi = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - \overline{\xi})^2$$

$$S_\xi^* = \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}(\xi_i - \overline{\xi}^*)^2\,, \qquad S_\eta^* = \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}(\eta_i - \overline{\eta}^*)^2\,, \qquad S_{\xi\eta}^* = \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}(\xi_i - \overline{\xi}^*)(\eta_i - \overline{\eta}^*)$$

最尤推定量は，[1] において得られている結果を利用すると，$S_\xi - \sigma_x^2 > 0$, $\sigma_x^2 S_\xi^{*2} S_\eta^* - S_{\xi\eta}^{*2} S_\xi^2 + \sigma_x^2 S_{\xi\eta}^{*2}(S_\xi - S_\xi^*) > 0$ の時に存在して，

$$
\begin{aligned}
\widehat{\mu} &= \overline{\xi} \\
\widehat{\alpha_1} &= \frac{S_{\xi\eta}^*}{\sigma_x^2}\frac{S_\xi}{S_\xi^*} \\
\widehat{\alpha_0} &= \overline{\eta}^* - \frac{S_{\xi\eta}^*}{\sigma_x^2}\frac{S_\xi}{S_\xi^*}\,\overline{\xi} + \frac{S_{\xi\eta}^*}{S_\xi^*}(\overline{\xi} - \overline{\xi}^*) \\
\widehat{\sigma_\delta^2} &= S_\xi - \sigma_x^2 \\
\widehat{\sigma_\epsilon^2} &= S_\eta^* - \frac{S_{\xi\eta}^{*2}}{\sigma_x^2}\left(\frac{S_\xi}{S_\xi^*}\right)^2 + \left(\frac{S_{\xi\eta}^*}{S_\xi^*}\right)^2 (S_\xi - S_\xi^*)
\end{aligned}
$$

となる．とくに，$n_1 = n$ とおく．つまり，missing data がないとすると，Case 1 で得られた最尤推定量と一致することがわかる．

3.3 Case 3

$$
\begin{array}{cccccc}
\xi_1 & \dots & \xi_{n_1} & & & \\
\eta_1 & \dots & \eta_{n_1} & \eta_{n_1+1} & \dots & \eta_n
\end{array}
$$

記号

$$
\overline{\eta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\eta_i\,, \qquad \overline{\xi}^* = \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}\xi_i\,, \qquad \overline{\eta}^* = \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}\eta_i\,, \qquad S_\eta = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\eta_i - \overline{\eta})^2
$$

$$
S_\xi^* = \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}(\xi_i - \overline{\xi}^*)^2\,, \qquad S_\eta^* = \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}(\eta_i - \overline{\eta}^*)^2\,, \qquad S_{\xi\eta}^* = \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}(\xi_i - \overline{\xi}^*)(\eta_i - \overline{\eta}^*)
$$

最尤推定量は，Case 2 と同じようにすると，$S_\eta^{*2}(S_\xi^* - \sigma_x^2) + S_{\xi\eta}^{*2}(S_\eta - S_\eta^*) > 0$, $\sigma_x^2 S_\eta S_\eta^{*2} - S_{\xi\eta}^{*2} S_\eta^2 > 0$ の時に存在して，

$$
\begin{aligned}
\widehat{\mu} &= \overline{\xi}^* + \frac{S_{\xi\eta}^*}{S_\eta^*}(\overline{\eta} - \overline{\eta}^*) \\
\widehat{\alpha_1} &= \frac{S_{\xi\eta}^*}{\sigma_x^2}\frac{S_\eta}{S_\eta^*} \\
\widehat{\alpha_0} &= \overline{\eta} - \frac{S_{\xi\eta}^*}{\sigma_x^2}\frac{S_\eta}{S_\eta^*}\left[\overline{\xi}^* + \frac{S_{\xi\eta}^*}{S_\eta^*}(\overline{\eta} - \overline{\eta}^*)\right] \\
\widehat{\sigma_\delta^2} &= S_\xi^* - \sigma_x^2 + \left(\frac{S_{\xi\eta}^*}{S_\eta^*}\right)^2 (S_\eta - S_\eta^*) \\
\widehat{\sigma_\epsilon^2} &= S_\eta - \frac{S_{\xi\eta}^{*2}}{\sigma_x^2}\left(\frac{S_\eta}{S_\eta^*}\right)^2
\end{aligned}
$$

となる．とくに，$n_1 = n$ とおく．つまり，missing data がないとすると，Case 1 で得られた最尤推定量と一致することがわかる．

3.4 Case 4

3.4.1 データについて

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\xi_1 & \dots & \xi_{n_1} & \xi_1^* & \dots & \xi_{n_2}^* & & & \\
\eta_1 & \dots & \eta_{n_1} & & & & \eta_1^* & \dots & \eta_{n_3}^*
\end{array}
\qquad n = n_1 + n_2 + n_3
$$

記号

$$
\begin{aligned}
&Z = (\xi_1, \dots, \xi_{n_1}, \eta_1, \dots, \eta_{n_1}, \xi_1^*, \dots, \xi_{n_2}^*, \eta_1^*, \dots, \eta_{n_3}^*)^T \\
&\overline{\xi} = \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}\xi_i\,, \qquad \overline{\eta} = \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}\eta_i\,, \qquad \overline{\xi}^* = \frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2}\xi_i^*\,, \qquad \overline{\eta}^* = \frac{1}{n_3}\sum_{i=1}^{n_3}\eta_i^* \\
&W_\xi = \sum_{i=1}^{n_1}(\xi_i - \mu)^2\,, \quad W_\eta = \sum_{i=1}^{n_1}(\eta_i - \mu')^2\,, \quad W_{\xi\eta} = \sum_{i=1}^{n_1}(\xi_i - \mu)(\eta_i - \mu') \\
&W_\xi^* = \sum_{i=1}^{n_2}(\xi_i^* - \mu)^2\,, \quad W_\eta^* = \sum_{i=1}^{n_3}(\eta_i^* - \mu')^2 \\
&S_\xi = \sum_{i=1}^{n_1}(\xi_i - \overline{\xi})^2\,, \quad S_\eta = \sum_{i=1}^{n_1}(\eta_i - \overline{\eta})^2\,, \quad S_{\xi\eta} = \sum_{i=1}^{n_1}(\xi_i - \overline{\xi})(\eta_i - \overline{\eta}) \\
&S_\xi^* = \sum_{i=1}^{n_2}(\xi_i^* - \overline{\xi}^*)^2\,, \quad S_\eta^* = \sum_{i=1}^{n_3}(\eta_i^* - \overline{\eta}^*)^2 \\
&\rho = \frac{b}{\sqrt{ac}}\,, \quad K = (n_1 + n_2)(n_1 + n_3) - \rho^2 n_2 n_3\,, \quad r^2 = \frac{c}{a}\,, \quad m_\xi = \overline{\xi}^* - \overline{\xi}\,, \quad m_\eta = \overline{\eta}^* - \overline{\eta}
\end{aligned}
$$

3.4.2 最尤推定

対数尤度関数は,

$$
\begin{aligned}
\log f(Z) \;=\;& const. - \frac{1}{2}n_1\log(ac - b^2) - \frac{1}{2}n_2\log a - \frac{1}{2}n_3\log c \\
& -\frac{1}{2}\frac{c}{ac - b^2}W_\xi + \frac{b}{ac - b^2}W_{\xi\eta} - \frac{1}{2}\frac{a}{ac - b^2}W_\eta - \frac{1}{2a}W_\xi^* - \frac{1}{2c}W_\eta^*
\end{aligned}
$$

となる．これらを a, b, c, μ, μ' について偏微分して，整理すると

$$
\begin{aligned}
c(n_1\overline{\xi} + n_2\overline{\xi}^*) + bn_3\overline{\eta}^* &= c(n_1 + n_2)\mu + bn_3\mu' \\
a(n_1\overline{\eta} + n_3\overline{\eta}^*) + bn_2\overline{\xi}^* &= a(n_1 + n_3)\mu' + bn_2\mu \\
c(aW_\eta - bW_{\xi\eta}) + (ac - b^2)W_\eta^* &= (n_1 + n_3)(ac - b^2)c \\
a(cW_\xi - bW_{\xi\eta}) + (ac - b^2)W_\xi^* &= (n_1 + n_2)(ac - b^2)a \\
bcW_\xi - (ac + b^2)W_{\xi\eta} + abW_\eta &= n_1(ac - b^2)b
\end{aligned}
$$

を得る．先の 5 つの方程式を整理してみると,

$$
r^2 A + rB + C = 0
$$

ただし,

$$
A \;=\; (n_1 + n_3)\left\{(1 - \rho^2)S_\xi^* + S_\xi + \frac{n_1 n_2(n_1 + n_3)}{K}m_\xi^2(1 - \rho^2)\right\}
$$

$$
\begin{aligned}
B &= \rho(n_2-n_3)\left\{S_{\xi\eta}+\frac{n_1n_2n_3}{K}m_\xi m_\eta(1-\rho^2)\right\} \\
C &= -(n_1+n_2)\left\{(1-\rho^2)S_\eta^*+S_\eta+\frac{n_1(n_1+n_2)n_3}{K}m_\eta^2(1-\rho^2)\right\}
\end{aligned}
$$

となることがわかる．これより，$-1<\rho<1$ を固定すると，r が求められる．得られた ρ, r を代入して μ, μ' を求める．

$$
\begin{aligned}
\mu &= \frac{1}{K}\left[(n_1+n_3)(n_2\overline{\xi}^*+n_1\overline{\xi})-\rho^2n_2n_3\overline{\xi}^*+\frac{\rho}{r}n_1n_3m_\eta\right] \\
\mu' &= \frac{1}{K}\left[(n_1+n_2)(n_3\overline{\eta}^*+n_1\overline{\eta})-\rho^2n_2n_3\overline{\eta}^*+\rho r n_1n_2n_3m_\xi\right]
\end{aligned}
$$

$\rho\neq 0$ の時，

$$
c=\frac{1}{n_1\rho(1-\rho^2)}\left\{\rho r^2W_\xi-r(1+\rho^2)W_{\xi\eta}+W_\eta\right\}
$$

へ ρ, r を代入して c を求め，$r^2a=c$ より a が求められる．さらに，得られた a, c を用いて，$b=\rho\sqrt{ac}$ が得られる．$\rho=0$ の時，$b=0$ となり，

$$
a=\frac{1}{n_1+n_2}(W_\xi+W_\xi^*),\quad c=\frac{1}{n_1+n_3}(W_\eta+W_\eta^*)
$$

となる．

以上から a, b, c, μ, μ' の推定値が得られ [5]，逆解きして $\mu, \alpha_0, \alpha_1, \sigma_\delta^2, \sigma_\epsilon^2$ の最尤推定値が得られる．

3.4.3 最尤推定量の漸近分散共分散行列

$\mu, \alpha_0, \alpha_1, \sigma_\delta^2, \sigma_\epsilon^2$ の最尤推定量の漸近分散共分散行列を考える．手法としては，直接 $\mu, \alpha_0, \alpha_1, \sigma_\delta^2, \sigma_\epsilon^2$ のフィッシャー情報行列を求めていく方法，別途，a, b, c, μ, μ' の最尤推定量の漸近分散共分散行列を変換して求めていく方法の 2 つが考えられる．ここでは，後者の方法を用いる．

$\theta=(a, c, b, \mu, \mu')^T$ とした時には，$\widehat{\theta}-\theta$ の漸近分散共分散行列は，

$$
I^{-1}=I(\theta)^{-1}=\begin{pmatrix} I_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & I_{22}^{-1}\end{pmatrix}
$$

となる．ここで，$I(\theta)$ はフィッシャー情報行列である．I_{11}, I_{22} は

$$
\begin{aligned}
I_{11} &= \begin{pmatrix}
\frac{n_1c^2}{2(ac-b^2)^2}+\frac{n_2}{2a^2} & \frac{n_1b^2}{2(ac-b^2)^2} & -\frac{n_1bc}{(ac-b^2)^2} \\
\frac{n_1b^2}{2(ac-b^2)^2} & \frac{n_1a^2}{2(ac-b^2)^2}+\frac{n_3}{2c^2} & -\frac{n_1ab}{(ac-b^2)^2} \\
-\frac{n_1bc}{(ac-b^2)^2} & -\frac{n_1ab}{(ac-b^2)^2} & \frac{n_1(ac+b^2)}{(ac-b^2)^2}
\end{pmatrix} \\
I_{22} &= \begin{pmatrix}
\frac{n_1c}{ac-b^2}+\frac{n_2}{a} & -\frac{n_1b}{ac-b^2} \\
-\frac{n_1b}{ac-b^2} & \frac{n_1a}{ac-b^2}+\frac{n_3}{c}
\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

と与えられ，これらの逆行列は，以下の様になる．

$$
I_{11}^{-1} = \frac{1}{D_1}\left(\begin{matrix}
2n_1a^4c^2+2n_3a^2(a^2c^2-b^4) & 2n_1a^2b^2c^2 \\
2n_1a^2b^2c^2 & 2n_1a^2c^4+2n_2a^2(a^2c^2-b^4) \\
2n_1a^3bc^2+2n_3a^2bc(ac-b^2) & 2n_1a^2bc^3+2n_2abc^2(ac-b^2)
\end{matrix}\right.
$$

$$
\left.\begin{array}{l}
2n_1a^3bc^2+2n_3a^2bc(ac-b^2) \\
2n_1a^2bc^3+2n_2abc^2(ac-b^2) \\
n_1a^2c^2(ac+b^2)+(n_2+n_3)a^2c^2(ac-b^2)+\frac{n_2n_3}{n_1}(ac-b^2)^3
\end{array}\right)
$$

$$
\begin{aligned}
& D_1 = n_1(n_1+n_2+n_3)a^2c^2+n_2n_3(a^2c^2-b^4) = (n_1+n_2)(n_1+n_3)a^2c^2-n_2n_3b^4 \\
= \; & \frac{2}{D_1'}\left(\begin{array}{ll}
\{n_1+n_3(1-\rho^4)\}a^2 & n_1b^2 \\
n_1b^2 & \{n_1+n_2(1-\rho^4)\}c^2 \\
\{n_1+n_3(1-\rho^2)\}ab & \{n_1+n_2(1-\rho^2)\}bc
\end{array}\right.
\end{aligned}
$$

$$
\left.\begin{array}{l}
\{n_1+n_3(1-\rho^2)\}ab \\
\{n_1+n_2(1-\rho^2)\}bc \\
\{n_1^2(1+\rho^2)+n_1(n_2+n_3)(1-\rho^2)+n_2n_3(1-\rho^2)^3\}ac/2n_1
\end{array}\right)
$$

$$
D_1' = (n_1+n_2)(n_1+n_3)-n_2n_3\rho^4
$$

$$
\begin{aligned}
I_{22}^{-1} &= \frac{1}{D_2}\begin{pmatrix}
n_1a^2c+n_3a(ac-b^2) & n_1abc \\
n_1abc & n_1ac^2+n_2c(ac-b^2)
\end{pmatrix} \\
& D_2 = n_1(n_1+n_2+n_3)ac+n_2n_3(ac-b^2) = (n_1+n_2)(n_1+n_3)ac-n_2n_3b^2 \\
&= \frac{1}{K}\begin{pmatrix}
\{n_1+n_3(1-\rho^2)\}a & n_1b \\
n_1b & \{n_1+n_2(1-\rho^2)\}c
\end{pmatrix} \\
& K = (n_1+n_2)(n_1+n_3)-n_2n_3\rho^2 \qquad \text{(以前の定義に同じ)}
\end{aligned}
$$

次に，$\theta^* = (\sigma_\delta^2, \sigma_\epsilon^2, \alpha_1, \mu, \alpha_0)^T$ とすると，

$$
\theta^* = A\theta
$$

となる．ただし，A は行列で

$$
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & -2b/\sigma_x^2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1/\sigma_x^2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & -\mu/\sigma_x^2 & -b/\sigma_x^2 & 1
\end{pmatrix}
$$

である．これより，$\widehat{\theta^*}-\theta^*$ の漸近分散共分散行列は，$AI^{-1}A^T$ で与えられることがわかる．

$$
AI^{-1}A^T = \begin{pmatrix}
w_{11} & w_{12} & w_{13} & 0 & w_{15} \\
w_{12} & w_{22} & w_{23} & 0 & w_{25} \\
w_{13} & w_{23} & w_{33} & 0 & w_{35} \\
0 & 0 & 0 & w_{44} & w_{45} \\
w_{15} & w_{25} & w_{35} & w_{45} & w_{55}
\end{pmatrix}
$$

ここで，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{AsVar}(\widehat{\sigma_\delta^2}) &= w_{11} = 2a^2\frac{n_1}{D_1'}+2(1-\rho^2)a^2\frac{n_3}{D_1'} \\
\mathrm{AsCov}(\widehat{\sigma_\delta^2}, \widehat{\sigma_\epsilon^2}) &= w_{12} = 2b^2\left(1-\frac{2a}{\sigma_x^2}\right)\frac{n_1}{D_1'}-(1-\rho^2)\frac{4ab^2}{\sigma_x^2}\frac{n_3}{D_1'} \\
\mathrm{AsCov}(\widehat{\sigma_\delta^2}, \widehat{\alpha_1}) &= w_{13} = \frac{2ab}{\sigma_x^2}\frac{n_1}{D_1'}+\frac{2ab}{\sigma_x^2}\frac{n_3}{D_1'}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{AsCov}(\widehat{\sigma_\delta^2},\widehat{\alpha_0}) &= w_{15} = -\frac{2ab\mu}{\sigma_x^2}\frac{n_1}{D_1'} - \frac{2ab\mu}{\sigma_x^2}\frac{n_3}{D_1'} \\
\mathrm{AsVar}(\widehat{\sigma_\epsilon^2}) &= w_{22} = 2\left(c^2 - \frac{4b^2c}{\sigma_x^2} + (1+\rho^2)\frac{2ab^2c}{\sigma_x^4}\right)\frac{n_1}{D_1'} \\
&\quad +2(1-\rho^2)\left((1+\rho^2)c^2 - \frac{4b^2c}{\sigma_x^2} + \frac{2ab^2c}{\sigma_x^4}\right)\frac{n_2}{D_1'} + (1-\rho^2)\frac{4ab^2c}{\sigma_x^4}\frac{n_3}{D_1'} + (1-\rho^2)^3\frac{4ab^2c}{\sigma_x^4}\frac{n_2n_3}{n_1D_1'} \\
\mathrm{AsCov}(\widehat{\sigma_\epsilon^2},\widehat{\alpha_1}) &= w_{23} = \left(1-(1+\rho^2)\frac{a}{\sigma_x^2}\right)\frac{2bc}{\sigma_x^2}\frac{n_1}{D_1'} + (1-\rho^2)\left(1-\frac{a}{\sigma_x^2}\right)\frac{2bc}{\sigma_x^2}\frac{n_2}{D_1'} \\
&\quad -(1-\rho^2)\frac{2abc}{\sigma_x^4}\frac{n_3}{D_1'} - (1-\rho^2)^3\frac{2abc}{\sigma_x^4}\frac{n_2n_3}{n_1D_1'} \\
\mathrm{AsCov}(\widehat{\sigma_\epsilon^2},\widehat{\alpha_0}) &= w_{25} = -\left(1-(1+\rho^2)\frac{a}{\sigma_x^2}\right)\frac{2bc\mu}{\sigma_x^2}\frac{n_1}{D_1'} - (1-\rho^2)\left(1-\frac{a}{\sigma_x^2}\right)\frac{2bc\mu}{\sigma_x^2}\frac{n_2}{D_1'} \\
&\quad +(1-\rho^2)\frac{2abc\mu}{\sigma_x^4}\frac{n_3}{D_1'} + (1-\rho^2)^3\frac{2abc\mu}{\sigma_x^4}\frac{n_2n_3}{n_1D_1'} \\
\mathrm{AsVar}(\widehat{\alpha_1}) &= w_{33} = (1+\rho^2)\frac{ac}{\sigma_x^4}\frac{n_1}{D_1'} + (1-\rho^2)\frac{ac}{\sigma_x^4}\frac{n_2+n_3}{D_1'} + (1+\rho^2)^3\frac{ac}{\sigma_x^4}\frac{n_2n_3}{n_1D_1'} \\
\mathrm{AsCov}(\widehat{\alpha_1},\widehat{\alpha_0}) &= w_{35} = -(1+\rho^2)\frac{ac\mu}{\sigma_x^4}\frac{n_1}{D_1'} - (1-\rho^2)\frac{ac\mu}{\sigma_x^4}\frac{n_2+n_3}{D_1'} - (1+\rho^2)^3\frac{ac\mu}{\sigma_x^4}\frac{n_2n_3}{n_1D_1'} \\
\mathrm{AsVar}(\widehat{\mu}) &= w_{44} = a\frac{n_1}{K} + (1-\rho^2)a\frac{n_3}{K} \\
\mathrm{AsCov}(\widehat{\mu},\widehat{\alpha_0}) &= w_{45} = b\left(1-\frac{a}{\sigma_x^2}\right)\frac{n_1}{K} - (1-\rho^2)\frac{ab}{\sigma_x^2}\frac{n_3}{K} \\
\mathrm{AsVar}(\widehat{\alpha_0}) &= w_{55} = \left((1+\rho^2)ac\frac{\mu^2}{\sigma_x^4}\frac{1}{D_1'} + \frac{ab^2}{\sigma_x^4}\frac{1}{K} - \frac{2b^2}{\sigma_x^2}\frac{1}{K} + c\frac{1}{K}\right)n_1 + (1-\rho^2)c\left(\frac{a\mu^2}{\sigma_x^4}\frac{1}{D_1'} + \frac{1}{K}\right)n_2 \\
&\quad +(1-\rho^2)\frac{a}{\sigma_x^4}\left(\mu^2c\frac{1}{D_1'} + b^2\frac{1}{K}\right)n_3 + (1-\rho^2)^3ac\frac{\mu^2}{\sigma_x^4}\frac{n_2n_3}{n_1D_1'}
\end{aligned}
$$

である．AsVar, AsCovは，それぞれ漸近分散，漸近共分散を表す．とくに，$\mathrm{AsVar}(\widehat{\mu})$, $\mathrm{AsVar}(\widehat{\alpha_0})$, $\mathrm{AsVar}(\widehat{\alpha_1})$, $\mathrm{AsVar}(\widehat{\sigma_\delta^2})$, $\mathrm{AsVar}(\widehat{\sigma_\epsilon^2})$, $\mathrm{AsCov}(\widehat{\alpha_1},\widehat{\alpha_0})$ で $n_2 = n_3 = 0$, $n_1 = n$ としたときの係数と Case 1 の $\mathrm{Var}(\widehat{\mu})$, $\mathrm{Var}(\widehat{\alpha_0})$, $\mathrm{Var}(\widehat{\alpha_1})$, $\mathrm{Var}(\widehat{\sigma_\delta^2})$, $\mathrm{Var}(\widehat{\sigma_\epsilon^2})$, $\mathrm{Cov}(\widehat{\alpha_1},\widehat{\alpha_0})$ で n^{-1} の係数はそれぞれ一致していることがわかる．

参考文献

[1] Anderson, T. W. (1957), Maximum likelihood estimates for a multivariate normal distribution when some observation are missing, *J. Amer. Statist. Assoc.*, **52**, 200–203.

[2] Atlas, D., D. Rosenfeld and D. B. Wolff (1990), Climatologically tuned reflectivity-rain rate relations and links to area-time integrals, *J. Appl. Meteor.*, **29**, 1120-1135.

[3] Cheng, C-L. and J. W. Van Ness (1999), *Statistical Regression with Measurement Error*, Kendall's Library of Statistics 6, Arnold.

[4] 岡本 謙一 編著 (1999)，ウェーブサミット講座「地球環境計測」，オーム社.

[5] Shimizu, K. (1993), A bivariate mixed lognormal distribution with an analysis of rainfall data, *J. Appl. Meteor.*, **32**, 161–171.