

# 情報量基準を用いた画像復元フィルタのパラメータ選択

今井英幸, 袁玉英, 佐藤義治

北海道大学 工学研究科 システム情報工学専攻

## 1 はじめに

画像復元問題は、何らかの劣化を受けた画像（劣化画像）から劣化を受ける前の画像（原画像）を、可能な限り忠実に復元する問題である。一般には、画像は無限次元空間に属する要素と考えることができるが、以下では元画像、劣化画像ともに有限次元空間の要素であることとする。また、劣化過程は線形作用素すなわち行列で表現できるものとする。ピントの外れた写真や手ブレした写真の劣化過程はこのクラスに属する。また、劣化した画像には平均 0 のある確率分布に従う加法的雑音があるものとする。このような仮定がある場合には劣化画像を  $g \in \mathbf{R}^m$ 、原画像を  $f_0 \in \mathbf{R}^n$ 、劣化仮定を表す  $m \times n$  行列を  $A$ 、加法的雑音を  $n \in \mathbf{R}^m$  とすると

$$g = Af_0 + n, \quad (1)$$

と表すことができる。また、復元画像  $f$  は  $n \times m$  行列  $B$  を用いて  $Bg$  となるものを対象とする。したがってこの画像復元は線形回帰モデルの母数  $f_0$  の推定と同等である。ただし、画像復元においては原画像及び復元画像は  $256 \times 256$  ピクセル以上のサイズが普通であり、推定量を求める効率的なアルゴリズムが必要になる。また、 $A'A$  および  $\text{Var}(n) = \Sigma$  は正則でないことが多い。こうした状況での母数推定に関しては、Rao and Mitra[10] に詳しく述べられている。Rao and Mitra[10] において、推定の基準は擬距離を最小にするものとして定式化されている。一方、画像の劣化過程において、作用素  $A$  は低域通過特性を有することが多いため、復元作用素  $B$  は高域通過特性を持つことになる。したがって、単純な一般逆行列などを用いると雑音が著しく拡大され、復元画像は大きく乱れたものになる。

こうした理由から、母数推定の評価式と雑音の抑制に関する評価式を荷重和とすることで、雑音の抑制効果を高める手法が数多く提案されている [1, 9, 11]。こうした基準から得られる復元方式では荷重パラメータの選択が復元画像の精度を決定する要因となる。本研究では、従来の復元方式を母数推定の立場から記述し、荷重パラメータを情報量基準によって選択する手法を提案する。

## 2 準備

### 2.1 記号

本論文で使用する記号を列記する.

$I_n$  :  $n$  次単位行列

$A'$  : 行列  $A$  の転置行列

$A^+$  : 行列  $A$  のムーア・ペンローズ一般逆行列

$\text{tr}\{A\}$  : 行列  $A$  のトレース

$\|x\|$  : ベクトル  $x$  のユークリッドノルム

$\|x\|_N$  : ベクトル  $x$  の  $N$ -ノルム ( $\|x\|_N \equiv (x'Nx)^{1/2}$ )

$\mathcal{N}(A)$  : 行列  $A$  の零空間

$\mathcal{R}(A)$  : 行列  $A$  の列ベクトルによって張られる線形部分空間

$P_S$  : 線形部分空間  $S$  への直交射影子

$S^\perp$  : 線形部分空間  $S$  の直交補空間

$E_f$  : 画像  $f$  の分布に関する平均

$E_n$  : 雑音  $n$  の分布に関する平均

### 2.2 射影フィルタ族

射影フィルタ族 (PFs)[4, 5] は, 射影フィルタ (PF)[8], 部分射影フィルタ (PTPF)[6, 7], 平均射影フィルタ (APF)[13, 12] の総称であり, その基本的な考え方は, 原画像空間における, 未知の原画像と復元画像の画像成分の近さ

$$\|\hat{f} - f\|^2 = \|BAf - f\|^2 \quad (2)$$

を最小とする作用素  $B$  の中で, 原画像空間上で評価した雑音の平均的なエネルギー

$$J_1 = E_n \|Bn\|^2 \quad (3)$$

が最も小さくなるものを復元作用素として採用するというものである [5]. 但し, 式 (2) の  $f$  は未知であるため, その最小性の評価は以下のような拘束条件として記述される.

$$\begin{aligned} BA = P_{\mathcal{R}(A')} & : \quad (\text{PF}) \\ BAP_S = P_L P_S & : \quad (\text{PTPF}) \\ E_f \|BAf - f\|^2 \rightarrow \min & : \quad (\text{APF}) \end{aligned}$$

ここで,  $S$  は部分射影フィルタにおいて原画像が属している既知の線形部分空間であり,  $L = (S \cap \mathcal{N}(A))^\perp$  とする. 上記条件を満たす具体的な作用素の一つとして,

$$\begin{aligned} B_{PFs} &= RV^+RA'U^+ \\ U &= AR^2A' + \Sigma \\ V &= RA'U^+AR \end{aligned}$$

を採用することができる. 但し  $R$  は,

$$\begin{aligned} \text{PF の場合} &: R = I_m \\ \text{PTPF の場合} &: R = P_S \\ \text{APF の場合} &: R = R_f^{1/2} \end{aligned}$$

となる.

### 2.3 パラメトリック射影フィルタ族

パラメトリック射影フィルタ族 (PPFs)[1] は, パラメトリック射影フィルタ (PPF)[9], パラメトリック部分射影フィルタ (PPTPF)[11], パラメトリックウィーナーフィルタ (PWF) の総称であり, 各々最適化基準,

$$J_2 = \begin{cases} \text{tr}\{(BA - P_{\mathcal{R}(A')})(BA - P_{\mathcal{R}(A')})'\} + \gamma E_{\mathbf{n}} \|B\mathbf{n}\|^2, & \text{PPF,} \\ \text{tr}\{(BAP_S - P_L P_S) \times (BAP_S - P_L P_S)'\} + \gamma E_{\mathbf{n}} \|B\mathbf{n}\|^2, & \text{PTPF,} \\ E_{\mathbf{f}} \|BA\mathbf{f} - \mathbf{f}\|^2 \gamma E_{\mathbf{n}} \|B\mathbf{n}\|^2, & \text{PWF,} \end{cases} \quad (4)$$

を最小とする作用素として定義される [1]. ここで,  $0 < \gamma \leq 1$  は実数のパラメータとする. 上記最適化基準は, 射影フィルタ族における画像の再現性に関する評価式と雑音の最小性に関する評価式をパラメータ  $\gamma$  を用いた荷重和にすることで, そのトレードオフを制御する手法といえる. 但し, 画像の再現性の評価が作用素方程式として記述される射影フィルタ及び部分射影フィルタにおいては, その成り立つ度合を作用素のシュミットノルムで評価している. 上記最適化基準を最小化する作用素は,

$$\begin{aligned} \text{PPF の場合} &: R = P_{\mathcal{R}(A')}, \quad Z = I_m \\ \text{PPTPF の場合} &: R = P_S, \quad Z = P_L \\ \text{PWF の場合} &: R = R_f^{1/2}, \quad Z = I_m \end{aligned}$$

として, 作用素方程式

$$(BA - Z)R^2A' + \gamma B\Sigma = 0 \quad (5)$$

の解として得られる [1].

また, 上記作用素方程式を満たす具体的な作用素の一つとして,

$$B_{PPFs}(\gamma) = ZR^2A'(AR^2A' + \gamma\Sigma)^+ \quad (6)$$

を採用することができる.

### 3 尤度基準と画像復元フィルタ

以下では加法的雑音  $n$  は正規分布  $N(0, \Sigma)$  に従うものとする。ただし、分散共分散行列  $\Sigma$  は既知であるものとする。また、劣化作用素  $A$  と  $\Sigma$  に

$$\mathcal{R}(A) \subset \mathcal{R}(\Sigma) \quad (7)$$

が成り立つものとする。これは劣化を受けるにもかかわらず雑音加わらない空間がないことを意味する。

仮定 (7) のもとで射影フィルタは  $B_{PF_s} = (A'\Sigma^+ A)^+ A'\Sigma^+$  と表すことができる [9]。このとき、

性質 1 射影フィルタ族による復元画像  $\hat{f} = B_{PF_s}g$  は  $f_0$  の最尤推定量である。

性質 2 分散共分散行列  $\Sigma$  が正則であれば  $\hat{f} = B_{PPF_s}g$  は罰則付き尤度

$$-(g - Af)'\Sigma^{-1}(g - Af) - \gamma f'f,$$

を最大にする推定量である。

### 4 情報量基準に基づくパラメータ選択

本節ではパラメトリック射影フィルタ  $B_{PPF}$  のパラメータ  $\gamma$  を情報量基準に基づいて選択する方法を提案する。ただし、本節においては同じ劣化過程を経た劣化画像が 2 枚以上枚得られているものとする。劣化画像の枚数を  $n(\geq 2)$  とすると一般化情報量基準  $GIC(\gamma)$  [2, 3] は

$$\begin{aligned} GIC(\gamma) &= \sum_{i=1}^n GIC_i(\gamma), \\ GIC_i(\gamma) &= 2(g_i - Af)'\Sigma^{-1}(g_i - Af) + 2\gamma f'f \\ &\quad + \frac{2}{n} \text{tr}\{(A'\Sigma^{-1}A + \gamma I_n)^{-1}[A'\Sigma^{-1}(g_i - Af) - \gamma f][A'\Sigma^{-1}(g_i - Af)]'\} \end{aligned}$$

となる。この  $GIC(\gamma)$  を最小にするパラメータ  $\gamma$  を選択する。

### 5 まとめ

本論文では、従来の画像復元法を線形回帰モデルの母数推定の立場から検討し、パラメトリック射影フィルタ族のパラメータ選択に一般化情報量基準を用いることを提案した。この方法は同じ劣化過程を経た複数枚の劣化画像を必要とする。実際の画像復元問題においては、劣化画像は一枚であることが普通であり、この条件はそのままでは満たされない。したがって、劣化作用素  $A$  に適当な条件を課すなどして、一枚のからでも適切なパラメータを選択できるような手法を開発する必要がある。

## 参考文献

- [1] H. Imai, A. Tanaka, and M. Miyakoshi. The family of Parametric Projection Filters and its properties for perturbation. *IEICE Transactions on Information and Systems*, Vol. E80-D, No. 8, pp. 788–794, Aug. 1997.
- [2] S. Konishi and G. Kitagawa. Generalized information criteria in model selection. *Biometrika*, Vol. 83, No. 4, 875–890, 1998.
- [3] 北川源四郎, 小西貞則. 一般化情報量基準 GIC とブートストラップ. *統計数理*, Vol. 47, No. 2, pp. 375–394, 1999.
- [4] 小出裕司, 山下幸彦, 小川英光. 信号・画像復元のための射影フィルタ族の統一理論. *電子情報通信学会論文誌*, Vol. J77-D-2, No. 7, pp. 1293–1301, July 1994.
- [5] 小川英光. [講座] 信号と画像の復元 [3]-最適復元のための射影フィルタ族. *電子情報通信学会誌*, Vol. 71, No. 7, pp. 739–748, July 1988.
- [6] 小川英光, 原昌司. 部分射影フィルタによる画像復元. *電子情報通信学会論文誌*, Vol. J71-A, No. 2, pp. 519–526, Feb. 1988.
- [7] 小川英光, 原昌司. 部分射影フィルタの諸性質. *電子情報通信学会論文誌*, Vol. J71-A, No. 2, pp. 527–534, Feb. 1988.
- [8] H. Ogawa and E. Oja. Projection Filter, Wiener Filter and Karhunen–Loève subspaces in digital image restoration. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 114, No. 1, pp. 37–51, 1986.
- [9] E. Oja and H. Ogawa. Parametric Projection Filter for image and signal restoration. *IEEE Transactions on Acoustic, Speech & Signal Processing*, Vol. ASSP-34, No. 6, pp. 1643–1653, Dec. 1986.
- [10] C. R. Rao and S. K. Mitra. *Generalized Inverse of Matrices and Its Application*. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1971.
- [11] 杉山博史, 小川英光. パラメトリック部分射影フィルタによる画像復元. *電子情報通信学会論文誌*, Vol. J72-D-2, No. 10, pp. 1618–1626, Oct. 1989.
- [12] 山下幸彦, 小川英光. 平均射影フィルタによる画像復元. *電子情報通信学会論文誌*, Vol. J74-D-2, No. 2, pp. 150–157, Feb. 1991.
- [13] 山下幸彦, 小川英光. 平均射影フィルタの諸性質. *電子情報通信学会論文誌*, Vol. J74-D-2, No. 2, pp. 142–149, Feb. 1991.