

初期通過時間の分布における或る統計的性質

広島大学大学院 工学研究科 河村敏彦

高栄春

広島大学大学院 工学研究科 岩瀬晃盛

1. はじめに

確率過程において、ある境界への初期通過時間の分布に関する問題は理論上のみならず、応用上重要な問題の1つである。Chhikara and Folks^[1] はある製品の故障・寿命に関する信頼性の研究において正のドリフトをもつ1次元 Brown 運動の初期通過時間の分布(逆ガウス型分布)モデルとして議論している。また生態系においてある種が絶滅するまでの期間は種数を表わす確率過程のレベルへの初期通過時間として考えられている。

本稿ではある拡散過程

$$X(t) = \sigma W(t), \quad t \geq 0$$

に対し、その初期通過時間の分布の統計的性質として分布関数の推定を議論する。ここで $\sigma > 0$ であり $\{W(t); t \geq 0\}$ は標準 Wiener 過程である。 $X(t)$ が初めて境界 $a(> 0)$ に達する初期通過時間 T_a は

$$T_a = \inf\{t \geq 0; X(t) \geq a\}$$

で定義される。ただし $\{t \geq 0; X(t) \geq a\} = \emptyset$ のときは $T_a = \infty$ とする。このとき初期通過時間 T_a の確率密度関数は

$$f_a(x; \lambda) = \frac{ax^{-\frac{3}{2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{a^2}{2\sigma^2 x}\right]$$

で与えられる^[2,3]。ここで $a/\sigma = \sqrt{\lambda}$ とおけば確率素分

$$f(x; \lambda)dx = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{2}\frac{\lambda}{x}} \frac{dx}{\lambda}, \quad (1)$$
$$0 < x < \infty, \quad 0 < \lambda < \infty$$

を得る。ここで λ は X の尺度パラメータであり、母調和平均に一致する。確率変数 X が上式で与えられる分布に従うとき $X \sim D(\lambda)$ と書くことにする。この分布は正のドリフトをもつ1次元 Brown 運動のドリフトを0に近づけた場合の分布であるが、それは逆ガウス型分布とはならず分布の統計的性質は以下で述べる独自の考察を必要とする。

Chhikara and Folks^[4] は逆ガウス型分布に関して正規分布との類似性の観点から分布関数の一様最小分散不偏推定量を述べている。Folks, Pierce and Stewart^[5] は正規分布に対して一様最小分散不偏推定量を議論している。我々は次節でこの分布の分布関数の点推定として最尤推定量と一様最小分散不偏推定量を考察する。

2. 分布関数の推定

この節では初期通過時間の分布のある時間 x_0 における累積分布関数 $F(x_0)$ の推定を議論する。言い換えれば、ある時間 x_0 以内にパスが境界 $a(> 0)$ を初めて通

過する確率(初期通過確率)を推定しようというものである。具体的な推定方法を述べる。ここでは最尤推定量と一様最小分散不偏推定量を考える。まず最尤法による推定は最尤推定の不変性の原理を使えば容易に求められる。次に Rao-Blackwell の定理によって一様最小分散不偏推定量を求める。標本確率変数 $X_1, X_2, \dots, X_n$ が互いに独立でそれぞれ $D(\lambda)$ に従うとき $F(x_0)$ の不偏推定量 $I_{(0, x_0]}(X_1)$ は

$$I_{(0, x_0]}(X_1) = \begin{cases} 1 & X_1 \in (0, x_0] \\ 0 & X_1 \in (x_0, \infty) \end{cases}$$

によって与えられる。ゆえに $F(x_0)$ の一様最小分散不偏推定量は完備十分統計量 $T(X)$ が与えられたときの条件付期待値 $E[I_{(0, x_0]}(X_1)|T(X)]$ によって得られる。次の2.1では最尤法を用いた場合の分布関数の推定を与え、2.2では一様最小分散不偏推定量を有限和および Gauss の超幾何関数を用いて与えた。

2.1 分布関数の最尤推定量

$X \sim D(\lambda)$ のとき累積分布関数 $F(x)$ は標準正規分布の累積分布関数 $\Phi(\cdot)$ を用いて

$$F(x) = 2 \left(1 - \Phi \left(\sqrt{\frac{\lambda}{x}} \right) \right)$$

で与えられる。標本確率変数 $X_1, X_2, \dots, X_n$ が互いに独立でそれぞれ $D(\lambda)$ に従うとき λ の最尤推定量 $\hat{\lambda}$ は

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{X_i}}$$

で与えられる。したがって分布関数の最尤推定量

$$\hat{F}(x_0) = 2 \left(1 - \Phi \left(\sqrt{\frac{\hat{\lambda}}{x_0}} \right) \right)$$

を得る。次に分布関数の一様最小分散不偏推定量を与える。

2.2 分布関数の一様最小分散不偏推定量

統計量 $T(X) = \sum_{i=1}^n 1/X_i$ は λ の完備十分統計量である。Rao-Blackwell の定理によって一様最小分散不偏推定量 $\tilde{F}(x_0)$ は

$$\tilde{F}(x_0) = E \left[I_{(0, x_0]}(X_1) \left| \sum_{i=1}^n \frac{1}{X_i} \right. \right]$$

で与えられる。最初に $T = t$ が与えられたときの X_1 の条件付密度関数 $h(x_1|t)$ を求める。まず X_1 と T の同時

確率密度関数 $f(x_1, t)$ は

$$f(x_1, t) = \frac{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} x_1^{-\frac{3}{2}} \left(t - \frac{1}{x_1}\right)^{\frac{n-1}{2}-1} e^{-\frac{\lambda}{2}t}, x_1 > \frac{1}{t}$$

で与えられる． T の周辺分布 $g(t)$ は

$$g(t) = \frac{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{\frac{n}{2}} t^{\frac{n}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} e^{-\frac{\lambda}{2}t}, \quad 0 < t < \infty$$

となる．したがって $T = t$ が与えられたときの x_1 の条件付密度関数 $h(x_1|t)$ は

$$h(x_1|t) = C \left(1 - \frac{1}{tx_1}\right)^{\frac{n-3}{2}} \frac{1}{x_1(tx_1)^{\frac{1}{2}}}, \quad x_1 > \frac{1}{t}$$

を得る．ここで $C = \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)/(\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right))$ である．ゆえに $F(x_0)$ の一様最小分散不偏推定量は

$$\tilde{F}(x_0) = \int_{\frac{1}{t}}^{x_0} C \left(1 - \frac{1}{tx_1}\right)^{\frac{n-3}{2}} \frac{1}{x_1\sqrt{tx_1}} dx_1, x_1 > \frac{1}{t} \quad (2)$$

と書ける．変数変換 $y = \arcsin\sqrt{1/tx_1}$ を施すと

$$\tilde{F}(x_0) = \frac{2\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_{\arcsin\sqrt{\frac{1}{tx_0}}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos y)^{n-2} dy, n \geq 2$$

で与えられる．上式の積分部分は Gradshteyn and Ryzhik^[6] の公式 2.512.5 を用いれば，分布関数 $\tilde{F}(x_0)$ の一様最小分散不偏推定量は次のように与えられる：

$$\begin{aligned} \tilde{F}(x_0) &= \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{2^{n-4}\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{n-2}{2} \right) \arccos \sqrt{\frac{1}{tx_0}} \right. \\ &\quad \left. - \sum_{k=0}^{\frac{n-4}{2}} \binom{n-2}{k} \frac{\sin\left((n-2-2k)\arcsin\sqrt{\frac{1}{tx_0}}\right)}{n-2-2k} \right], \\ &\quad n = 4, 6, 8, \dots \quad x_0 > \frac{1}{t}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{F}(x_0) &= \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{2^{n-4}\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \sum_{k=0}^{\frac{n-3}{2}} \binom{n-2}{k} \frac{1}{n-2-2k} \times \\ &\quad \left[\sin\left((n-2-2k)\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left((n-2-2k)\arcsin\sqrt{\frac{1}{tx_0}}\right) \right], \\ &\quad n = 3, 5, 7, \dots \quad x_0 > \frac{1}{t}. \end{aligned}$$

$n = 2$ の場合，

$$\tilde{F}(x_0) = \frac{2}{\pi} \arccos \sqrt{\frac{1}{tx_0}}, \quad x_0 > \frac{1}{t}$$

で与えられる． $x_0 < 1/t$ のとき $\tilde{F}(x_0) = 0$ となる．さらに分布関数の一様最小分散不偏推定量を Gauss の超幾何関数を使って表現する．(2) 式より変数変換

$$z = \frac{1}{\sqrt{tx_1}} - \frac{1}{\sqrt{tx_0}}$$

を施せば

$$\begin{aligned} \tilde{F}(x_0) &= 2C \int_0^{1-\sqrt{\frac{1}{tx_0}}} \left(1 - \sqrt{\frac{1}{tx_0}} - z\right)^{\frac{n-3}{2}} \\ &\quad \times \left(1 + \sqrt{\frac{1}{tx_0}} + z\right)^{\frac{n-3}{2}} dy \end{aligned}$$

となる．上式の積分部分は Gradshteyn and Ryzhik^[6] の公式 3.196 を利用して，

$$\begin{aligned} \tilde{F}(x_0) &= \frac{4C}{n-1} \left(1 - \frac{1}{tx_0}\right)^{\frac{n-3}{2}} \left(1 - \sqrt{\frac{1}{tx_0}}\right) \\ &\quad \times {}_2F_1\left(1, -\frac{n-3}{2}; \frac{n+1}{2}; -\frac{\sqrt{tx_0}-1}{\sqrt{tx_0}+1}\right) \end{aligned}$$

を得る．ここで ${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; z)$ は Gauss の超幾何関数である．上式の Gauss の超幾何関数を Gradshteyn and Ryzhik^[6] の公式 3.111 によって変形すれば，分布関数 $F(x_0)$ の一様最小分散不偏推定量は Gauss の超幾何関数を使って

$$\begin{aligned} \tilde{F}(x_0) &= \frac{2}{n-1} \sqrt{\frac{1}{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} (tx_0 - 1)^{-\frac{n-2}{2}} \\ &\quad \times {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, 1; \frac{n-1}{2}; 1 - tx_0\right), \quad x_0 > \frac{1}{t}, n \geq 2 \end{aligned}$$

で与えられる． $x_0 < 1/t$ のとき $\tilde{F}(x_0) = 0$ となる．ここで $t = n/\lambda$ である．

以上によりそれぞれの分布関数の推定量は得られたけれども，それらの分散は得られていない．

参考文献

- [1] Chhikara, R. S. and Folks, J. L. (1977). The inverse Gaussian distribution as a lifetime model. *Technometrics*, **19**, pp. 461–468.
- [2] Seshadri, J. L. (1993). *The Inverse Gaussian Distribution*. Oxford University Press, Oxford.
- [3] Cox, D. R. and Miller, H. D. (1965). *The Theory of Stochastic Processes*. Chapman and Hall, New York.
- [4] Chhikara, R. S. and Folks, J. L. (1974). Estimation of the inverse Gaussian distribution. *Journal of the American Statistical Association* **69**, pp. 250–254.
- [5] Folks, J.L., Pierce, D.A., and Stewart, C. (1965). Estimating the fraction of acceptable product. *Technometrics*, **7**, pp. 43–50.
- [6] Gradshteyn, I.S. and Ryzhik, I.M. (1980). *Table of Integrals, Series, and Products*. Academic Press, New York.