順位関連性係数による分割表の解析

菅野長武（津山商業高校）

1. はじめに

$r \times s$ 分割表について、行の項目と列の項目間の関連性の測度として、カイ二乗統計量(χ^2)の他には Mean square contingency(ϕ)、Peason の連関係数（C）、Tschuprou の連関係数（T）や Cramer の連関係数(V）が使われてきた。これまでに、χ^2は周辺度数をもとにした上での独立性を検定する統計量として、Cは $r \to \infty, s \to \infty$でなければ最大値は１にならない、Tは $r=s$ のとき最大値１をとる、Vはχ^2系の関連性の測度としてはおそらく最適なもの、等という特徴が知られている。

しかし Wakimoto(1987)により､これら従来からの関連性の測度だけでは、二つの $r \times s$ 分割表間のより詳細な相違点を見出すことが出来ないことが指摘され､行と列の項目間の独立性の帰無仮説の下での観測度数と期待度数間の相対誤差を小さい順に並べて、Wakimoto(1981)の multiple chart の各辺とする Association Graph が提案され、グラフの違いを目視によって把握することによって、より詳細な相違点を見出す方法が提案された。

そこで Sugano(2001)は二つの順位関連性係数（Sugano&Yamamoto,1983 と Sugano&Watadani,1993）を $r \times s$ 分割表に対して適用して、従来の連関係数に比べて二つの分割表間のより詳細な相違点を見出すことが容易であることを示している。

本稿では、累積χ^2検定との比較や、オッズ比検定、一般化マンテル検定、MCMC法等によるｐ値との比較を文献中のデータに対して行うとともに､実際の医学データに対して、順位関連性係数と従来のχ^2系の関連性の測度による解析との比較を行って、提案する順位関連性係数の有用性を指摘する。

２．提案する順位関連性係数と従来の関連性の測度

次の $r \times s$ 分割表が与えられた時、

B \ A	B_1	B_2	…	B_j	…	B_s	計
A_1	N_{11}	N_{12}		N_{1j}		N_{1s}	$N_{1.}$
A_i	N_{i1}	N_{i2}		N_{ij}		N_{is}	$N_{i.}$
A_r	N_{r1}	N_{r2}		N_{rj}		N_{rs}	$N_{r.}$
計	$N_{.1}$	$N_{.2}$		$N_{.j}$		$N_{.s}$	N

$$D_{ij}=\frac{(N_{ij}-E_{ij})^2}{E_{ij}},E_{ij}=\frac{N_{i.}N_{.j}}{N},(i=1,2,...,r;\ j=1,2,...,s),(2.1)$$

によって計算した次の様な r×s 個の相対誤差の表を得る。

A_1	D_{11}	D_{12}		D_{1j}		D_{1s}	
A_i	D_{i1}	D_{i2}		D_{ij}		D_{is}	
A_r	D_{r1}	D_{r2}		D_{rj}		D_{rs}	

この時　r×s 個の相対誤差 D_{ij} を大きさの順に並べた時、$D_{11},\ldots,D_{rs}$ 中の　D_{ij} の順位を R(k)とするとき、二つの順位関連性係数を次の式で定義する。

$$s_{1,n}=\{\frac{-2S_{1,n}+n^2-2}{n(n-2)}\ \ for\ \ n\ \ even\ ,\quad \frac{-2S_{1,n}+n^2-3}{n(n-2)-1}\ \ for\ \ n\ \ odd\},$$

$$s_{2,n}=\{\frac{(n-1)(n^2+n-3)-3S_{2,n}}{(n-2)(n-1)(n+3)}\ \ for\ \ n\ \ even\ ,\ \frac{n(n-2)(n+2)-3S_{2,n}}{n^3-7n+3}\ \ for\ \ n\ \ odd\ \},(2.2)$$

$$S_{u,n}=\sum_{k=1}^{n-1}|\,R(k+1)-R(k)\,|^u,(u=1,2;n=rs),0\le s_{u,n}\le 1.$$

ここに $s_{1,n}$ は Sugano&Yamamoto(1983)を、 $s_{2,n}$ は Sugano&Watadani(1993)を r×s 分割表に対する順位関連性係数として定義したものである。

従来の χ^2 系関連性係数は D_{ij} を用いて定義すれば、次式で与えられる。

$$\chi^2=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}D_{ij},\phi=\sqrt{\chi^2/N},\mathrm{C}=\sqrt{\frac{\chi^2/\mathrm{N}}{1+\chi^2/\mathrm{N}}},\mathrm{T}=\sqrt{\frac{\chi^2/\mathrm{N}}{(\mathrm{r}-1)(\mathrm{s}-1)}},\mathrm{V}=\sqrt{\frac{\chi^2/\mathrm{N}}{\mathrm{Min}(\mathrm{r}-1,\mathrm{s}-1)}}.(2.3)$$

Wakimoto,　Odaka　and　Kang(1987)中の表２ａ、表２ｂ

Table　2a　(r=1,s=5).

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Total
N_{1j}	12	6	6	4	2	30
E_{1j}	6	6	6	6	6	30
D_{1j}	6	0	0	2/3	8/3	χ^2=28/3
R(k)	R(1)=5	R(2)=1	R(3)=2	R(4)=3	R(5)=4	$S_{1,5}$=7 $S_{2,5}$=19

Table 2b (r=1,s=5).

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Total
N_{1j}	10	8	8	2	2	30
D_{1j}	8/3	2/3	2/3	8/3	8/3	χ^2=28/3
R(k)	R(1)=3	R(2)=1	R(3)=2	R(4)=4	R(5)=5	$S_{1,5}$=6 $S_{2,5}$=10

に対する解析結果を次に示す、また Association Graph は次の様に異なっている。

The association measures for the table2a and the table2b.

	χ^2	φ	C	T	V	$S_{1,5}$	$\boldsymbol{S_{2,5}}$
Table 2a	28/3	0.5577	0.4871	0.2788	0.5577	0.5714	0.4247
Table 2b	28/3	0.5577	0.4871	0.2788	0.5577	0.714	0.806
Difference		0.0	0.0	0.0	0.0	0.1426	***0.3813***

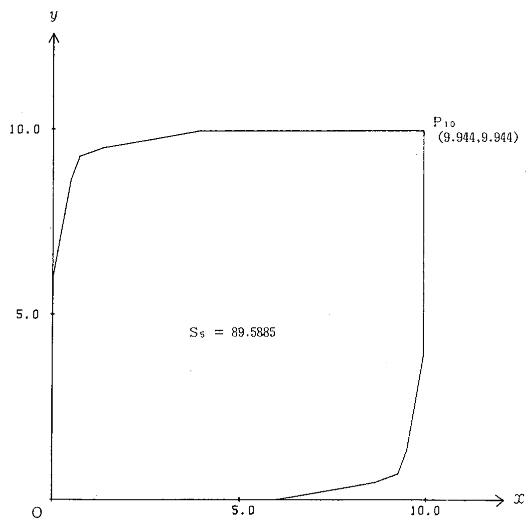

Fig. 2a. χ^2 graph corresponding to Table 2a.

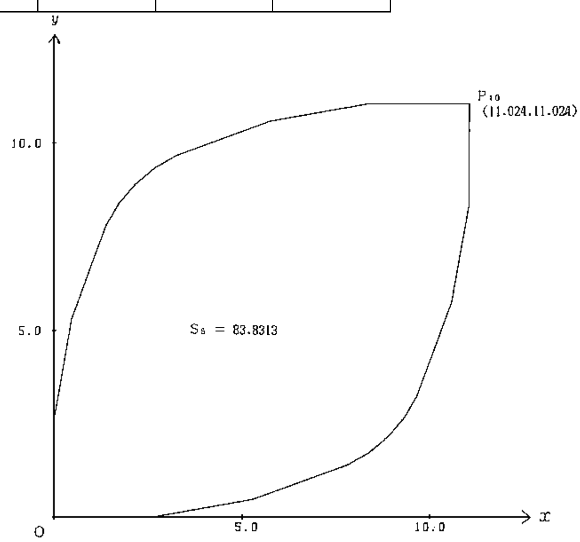

Fig. 2b. χ^2 graph corresponding to Table 2b.

また Wakimoto(1987)中の表３、表４

Table3.(r=4,s=3)

B / A	B_1	B_2	B_3	Total
A_1	8	24	35	67
A_2	66	10	18	94
A_3	12	28	41	81
A_4	44	5	9	58
Total	130	67	103	300

Table 4.　(r=4,s=3)

B / A	B_1	B_2	B_3	Total
A_1	47	16	4	67
A_2	46	33	15	94
A_3	30	15	36	81
A_4	7	3	48	58
Total	130	67	103	300

の解析結果と Association　Graph　は次のようになる。

	χ^2	ϕ	C	T	V	$s_{1,12}$	$s_{2,12}$
Table 3	106.61	0.596	0.512	0.243	0.422	***0.783** 1%sig.***	0.856* *5%sig*
Table 4	107.71	0.599	0.514	0.245	0.424	0.333	0.505
Difference		0.003	0.002	0.002	0.002	***0.450***	0.351

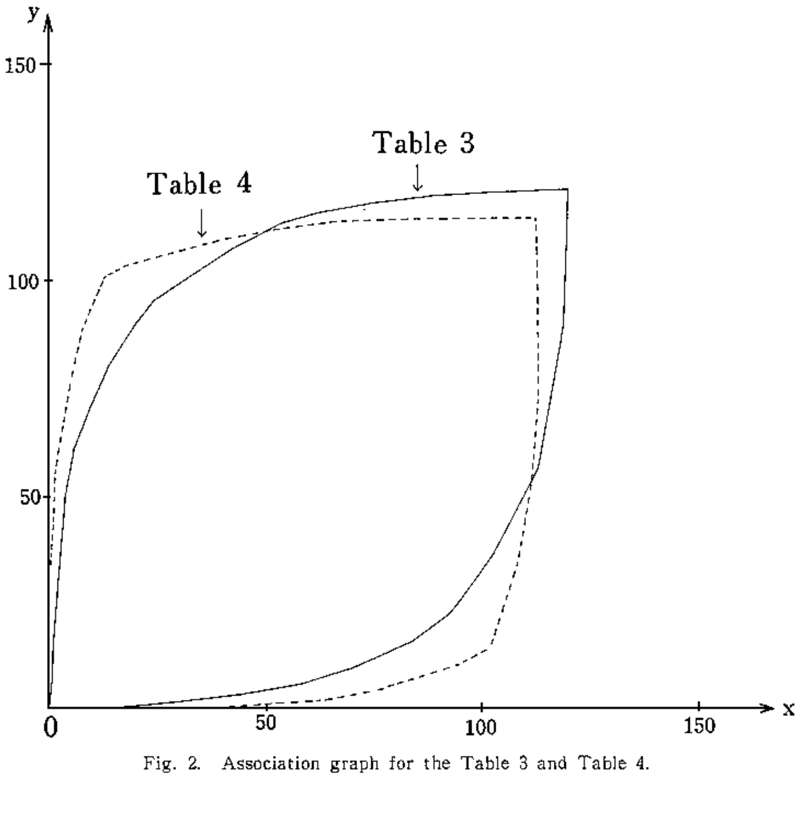

Fig. 2.　Association graph for the Table 3 and Table 4.

以上の結果から*表２ａ、２ｂにおいては*$s_{2,n}$*が、表３、４においては*$s_{1,n}$*がその相違を良く捉えていることがわかる。*

３．順位関連性係数と累積カイ二乗検定法との比較

２節において、r×s 分割表に対する提案する順位関連性係数と χ^2系の関連性の測度間の比較を行った。本節において、累積カイ二乗検定法との比較を Windows 版 統計解析ハンドブック（基礎統計）のｐ151 の例題；

表 3.1　２種類の薬剤Ａ、Ｂを比較する臨床試験

	著効	有効	やや有効	無効	計
Ａ	３	６	１２	９	３０
Ｂ	５	１１	９	４	２９
計	８	１７	２１	１３	５９

について行った結果は次表のようであった。

表 3.2　：　表 3.1 に対する計算結果

χ^2	φ	C	T	V	$S_{1,8}$	$S_{2,8}$
4.3065	0.27	0.2606	0.1559	0.27	0.6667	0.6883

χ^2 =4.3065＜7.8147(5%点)　であるから、帰無仮説は採択され、有意水準５％で両薬剤Ａ、Ｂの有効性に差があるとは言えない。ちなみに、$\Pr\{\chi^2(3)>4.3065\}=0.2343$ である。同様に***累積カイ二乗法でも、*** ***$\chi^{*2}=6.74<d\chi^2(2.28,0.05)=8.58$ となり、有意水準５％で差があるとは言えない。***この時、$\chi^{*2}=6.74$ のｐ値は近似的に 0.0994 となる。

しかるに、順位関連性係数による検定では、$S_{1,8}=15$,　$S_{2,8}=55$ で、$\Pr\{S_{1,8}<15|n=8\}=0.0875$,　$\Pr\{S_{2,8}<55|n=8\}=0.1519$ であった。すなはち、”***$S_{2,8}$ のｐ値(0.1519)＞累積カイ二乗検定のｐ値(0.0944)＞$S_{1,8}$ のｐ値(0.0875)***”である。

４．順位関連性係数とのｐ値の比較

”オッズ比の均一性の検定”、”共通オッズ比の適合性検定”とのｐ値の比較

Windows 版 統計解析ハンドブック（基礎統計）のｐ183 の例題；

表 4.1　試験薬Ａと偽薬Ｐの比較の為の臨床試験

反応 ＼ 薬剤	層Ｂ$_1$ 改善	非改善	計		層Ｂ$_2$ 改善	非改善	計
Ａ	21	6	27		14	14	28
Ｐ	13	18	31		4	15	19
計	34	24	58		18	29	47

に対する解析結果は、ハンドブックから、オッズ比の均一性検定では $\chi^2=0.081<\chi^2(1,0.05)=3.841$ で、また共通オッズ比モデルの適合性の検定でも $\chi^2=0.083<3.841$ となり、有意水準 5%で H_0 は棄却されない。このことは層Ｂ$_1$と層Ｂ$_2$の間には薬剤効果に差は無いことを意味している。この時、両方の層において $S_{1,4}=5$、$S_{2,4}=11$ で、順位関連性係数にも差がない。この時、三者のｐ値を比較すると、

	オッズ比均一性検定	共通オッズ比適合性検定	順位関連性検定
p 値	*０．７８　＞*	*０．７７６８　＞*	*０．７５*

である。

”一般化マンテル検定とのｐ値の比較”

応用統計学 Vol.29,No.3 大久保直樹(2000)中の次のデータ

表 4.2 ダンピング症候群データ

	無	軽	重	計
A	18	6	1	25
B	18	6	2	26
C	13	13	2	28
D	9	15	2	26
計	53	40	7	105

（A:十二指腸 0%摘出、B:十二指腸 25%摘出、C:十二指腸 50%摘出、D:十二指腸 75%摘出）に対する解析結果は、χ^2 =10.92135<12.5916(5%点)より、帰無仮説は棄却されない。すなわち、十二指腸摘出の割合とダンピング症候群の重症度は無関係である。（しかるに、χ^2 =10.92135 は 10%有意）。ところで、$s_{1,12}$=0.6 も $s_{2,12}$=0.7091 も５％有意では無いが、$\Pr\{S_{1,12}<35|n=12\}=0.0616$（$\chi^2$の 10%有意点は 10.6446）である。なお、大久保直樹(2000)より、帰無仮説；H_0に対する対立仮説；H_1”十二指腸摘出の割合を考慮せずにダンピング症候群が増加する” を対比する一般化マンテル検定の有意確率（ｐ値）はχ^2近似で 0.062 で $S_{1,12}$ の 0.0616 に極めて近い。またこの時、ＭＣＭＣ法によるｐ値は 0.056 となっている。すなはち四者のｐ値の比較をすると、

	$S_{2,12}$	***一般化マンテル検定***	***$S_{1,12}$***	***MCMC 法***
p 値	***0.0713***	***>　0.062　　>***	***0.0616***	***>　0.056***

となる。

５．治験薬の臨床効果データの解析例

Yanagawa　et.　al.(1992)および Koshimizu&Tsujitani(1998)は衣笠 et. al.(1989)の内痔核に対するネリプロクト坐剤の臨床効果を調べている論文から既往暦により３つの層に層別された改善度のデータに二つの基準に対する検定を適用した結果、治験薬の対照薬に対する有効性を論じている。ここでは、このデータに対して既往暦とネリプロクト坐剤の効果（改善度）の関連性を検定する。

表 5.1　ネリプロクトのデータ

既往暦		データ			改善率	オッズ比
		改善	非改善	計		
なし	治験薬	13	10	23	0.5652	1.21
	対照薬	15	14	29	0.5172	
数回	治験薬	30	20	50	0.6	1.00
	対照薬	27	18	45	0.6	
慢性	治験薬	19	19	38	0.5	2.88
	対照薬	8	23	31	0.2581	
計	治験薬	62	49	111	0.5586	1.39
	対照薬	50	55	105	0.4762	

に対する解析結果は、***χ^2＝0.8809<5.99146(5%有意点)***であるから、有意水準

5%で帰無仮説は棄却されない。またこの時、***累積カイ二乗統計量＝0.8088<累積χ^2の5%有意点=5.9928****[1]で、やはり5%有意でない。よって、**既往暦と治験薬（ネリプロクト坐剤）による改善度との間には関係が無い**と言える。ところが、順位関連性係数を用いて検定すると、***$S_{u,6(u=1,2)}=5$ で、$Pr\{S_{u,6(u=1,2)}<5|n=6\}=0.0028$ となり、どちらも１％有意である***。よって、既往暦とネリプロクト坐剤の効果の間には完全な関連性があるといえる。

また、対照薬（トリベノシド配合坐剤）に対する解析結果；***$\chi^2=8.8746>5.99146$=5%有意点***(1%点＝9.21)より、1%有意ではないが、有意水準5%で帰無仮説は棄却される。よって、既往暦とトリベノシド配合坐剤の間には関係があるといえる。またこの時、累積カイ二乗統計量；***$\chi^{*2}=8.661>$累積χ^2の５％有意点=6.4152****[2]で、5%有意である。このとき、順位関連性係数を用いて検定すると、***$S_{u,6(u=1,2)}=5$ で、$s_{u,6(u=1,2)}=1.000$ となり１％有意***となる。以上の結果をすべて次表にまとめると、

	χ^2	φ	C	T	V	$s_{1,6}$	$s_{2,6}$
治験薬	0.8809	0.0891	0.0887	0.0630	0.0891	***1.000*****	***1.000*****
対照薬	8.8746*	0.2907	0.2792	0.2056	0.2907	***1.000*****	***1.000*****

となる。

APPENDICES

＊１；

$$C^*=\begin{pmatrix}0.8903 & 0.0131\\ -0.3431 & 0.0194\\ -0.2991 & -0.0324\end{pmatrix}\quad \text{より、}\quad \mathrm{tr}(C^{*\prime}C^*)^2=2.000$$

よって　d=1.000、ν=2.000、　従って、棄却限界値：dχ（ν,0.05）=5.9928。

＊２；　＊１と同様にして、

$$C^*=\begin{pmatrix}0.8508 & 0.3402\\ -0.4046 & 0.4238\\ -0.3358 & -0.8396\end{pmatrix}$$

より、　　棄却限界値：$d\chi^2(\nu,0.05)=6.4152$　を得る。

REFERENCES

衣笠昭　他（1989）.　内痔核に対するネリプロクト坐剤の臨床効果ートリベノシド配合坐剤との多施設群間比較臨床試験ー.　*薬理と治療*　*Vol.**17***　*No.**12***　*257-273.*

Koshimizu,T.and Tsujitani,M.(1998). Two-Stage Testing to Establish Non-Inferiority in the Stratified 2×2 Contingency Tables. *J. Jpn. Comp. Statist..*, ***11***, *25-39.*

大久保直樹（2000）. MCMC 法の I×J 分割表への適用：一般化マンテル検定と相関検定. *応用統計学 Vol.***29**, *No.****3*** *131-139.*

Sugano,O.(2001). Rank Association Measures for Cross Classifications. ***ICNCB*** *Proceedings*, 371-376.

Sugano,O.and Yamamoto,E.(1983). On association analysis based on smoothness rank statistic. *Journal of the Japan Statistical Society, Vol.****13*** *No****.1*** *33-46.*

Sugano,O.and Watadani,S.(1993). An association analysis based on a statistic Orthogonal to linear rank statistics. *Behaviormetrika Vol.****20*** *No.****1*** *17-33.*

田中豊、垂水共之（1997）. Windows 版 統計解析ハンドブック 基礎統計 共立出版.

Wakimoto,K.(1981). k-multiple chart and its application to the test for homogeneity against orderd alternatives, *J. Japan Statist. Soc.,* ***11***, *1-7.*

Wakimoto,K.(1987). A graphical association measure for the cross classifications. *Bulletin of Informatics and Cybernetics Vol.****22*** *No.****3-4***, *209-214.*

Wakimoto,K.,Odaka,Y.and Kang,L.(1987). Testing the goodness of fit of the Multinomial distribution based on graphical representation. *Computational Statistics & Data Analysis* ***5*** *137-147.*

Yanagawa,T.,Hiejima,Y.and Sawa,J.(1992). Statistical Tests for Testing "Equivalence, or More than Eqivalence" of Two Drugs Adjusting for Prognostic Factors. *Japanese Journal of Biometrics.* ***13***, *39-45.*

Yanagawa,T. Tango,T.and Hiejima,Y.(1994). Mantel-Haenszel-type tests for testing eqivalence or more than equivalence in comparative clinical trials. *Biometrics*, ***50***, *859-864.*