

MCMC 法による階段状データの推定*

大鋸 崇**

東京都立大学経済学部

2001 年 12 月 15 日

1 はじめに

現在、構造変化を含む時系列の分析においては Hamilton(1989)のマルコフ・スイッチング・モデルが主流である(Kim and Nelson(1999)参照)。このモデルは基本的には、ある有限個の状態の間をマルコフの推移確率をもって、確率的にジャンプすることを考えている。たとえば、Albert and Chib(1993b)ではレベル、分散の高低を有限の個数(3:高中低)の状態で行っているが、マルコフの推移確率に従いレベルを三状態に分類したに過ぎない。すなわち、マルコフ・スイッチング・モデルにおいては、一回離れたある状態に戻る事がわかる。Hamilton(1989)についても同様で、リセッション時(好況時)の傾きは常にそれぞれ一定である。これは、マルコフ・スイッチング・モデルにおける欠点の一つであると考えられる。これを回避するために、レベルや傾きなどのバリエーションを増やすとそれに応じて状態数も増えてしまう。また状態数については、マルコフ・スイッチング・モデルを用い

* 本稿を作成するにあたり渡部敏明先生(東京都立大学教授)、大森裕浩先生(東京都立大学教授)、中妻照雄先生(慶応義塾大学講師)、高山俊則氏(SGYAM)、また渡部ゼミのゼミ生の方々から有益なコメントを頂きました。記して感謝申し上げます。

** 連絡先：〒192-0397 東京都八王子市南大沢 1-1 . Tel : 0426-77-1111 .

E-mail : ohga@bcomp.metro-u.ac.jp

て分析をするにあたり何らかの基準による状態数の選択が不可欠である。これは、ノン・ネストのモデルセレクション問題となるので、モデルセレクションの方法に依存してしまう傾向がある。

構造変化を伴う時系列データを取り扱うことが出来るオルタナティブ¹として McCulloch and Tsay (1993)、Barnette, Kohn, and Sheather (1993)、Chen and Tiao (1990)、Chen and Liu (1993)、De Jong and Penzer (1998)、Gerlach, Carter, and Kohn (2000)などで取り上げられている、ダイナミック・ミクスチャー(DM)モデルがある。DMモデルにおいて重要な考え方は、状態を変化と不変という2状態に限定し、ある確率で、隠れている確率変数が出現するというものである。これにより、前述したマルコフ・スイッチングモデルにおける問題を回避することが出来る。このアイデアは Merton(1976)のジャンプ・ディフュージョンモデルにも見られ、最近の実証研究としては Johannes, Kumar, and Polson (1999)、Johannes, Eraker, and Polson (1999)などがあり、Markov Chain Monte Carlo (MCMC)法を用いて推定されている。

さらに DMモデルの優れた点は Data augmentation により生じたレベルシフトの大きさ方向を推定することが出来ることである。また、Gerlach, Carter, and Kohn (2000)、Johannes, Kumar, and Polson (1999)では確率変数が出現する確率を一期前の外生変数の関数であるように定式化し、レベルシフトおよびジャンプの予測可能性を示している。また、Johannes, Kumar, and Polson (1999)ではさらに、株価指数データにおける、Jumpの大きさ方向の予測可能性をも見出している。

具体的には、DMモデルをレベルシフトに応用する場合、一期前のレベルに対して、ベルヌイ分布に従う0、1の確率変数とある連続の分布(正規分布など)の積を足し合わせていくことで表現される。すなわち、確率的に1(0)が生じたならば構造変化が生じた(生じない)と考えるのである。また、DMモデルはアウトライヤーの分析にも用いられるが、その場合、前述の足し合わせは行われない。Gerlach, Carter, and Kohn (2000)ではレベル・シフトとアウトライヤーの両方を考慮したモデリングがおこなわれている。

上記のように、レベルシフトを内包するデータを取り扱う場合²に、DMモデルは事前に状態数(平均の個数)を選択する必要もなければ過去の平均に回帰することもないことがわかる。このことから、DMモデルを用いることにより上記のマルコフ・スイッチング・モデルの欠点を解消することが可能となる。このような理由から、本研究では、DMモデルを取り

¹ Wang and Zivot(2000)の broken trend model は情報量基準(SBIC)や posterior odds ratio を用いて状態数を選択するのではなく、標本期間を何分割するかを決定することによりマルコフ・スイッチングにおける問題を解決しているが、やはり、モデルの選択基準により分割する期間数は一定していないので問題を残している。

² 期間内に構造変化がおきているかどうかはここでは問題としない。すなわち、構造変化がおきていることを前提としている。構造変化がなかった場合 Davis問題が生じるのはマルコフ・スイッチングと同様である。構造変化の有無の検定については Wang and Zivot(2000)参照のこと。

上げ、さらに拡張を行う。

具体的には、本研究では DM モデルの中でも McCulloch and Tsay (1993)のランダム・レベル・シフト(RLS)モデルを拡張する。レベルシフトが生起する確率が外生変数により説明されることをモデルに取り入れるために McCulloch and Tsay (1993)では単純なベルヌイ分布ではなくプロビットモデルを導入している。しかし、外生変数をレベルシフトの確率の説明変数とした場合、プロビットモデルでは、ある外生変数が上昇したときのみもしくは下落したときのみレベルシフトが生じることとなる。またそのとき、レベルシフトの大きさ方向は、レベルシフトの発生と独立であるとされている。しかし、実際に経済データを取り扱う上では、外生変数の大きな上昇も大きな下落もレベルシフトを引き起こす確率を高めていると考えられることから、プロビットモデルをあてはめるのは問題がある。

本研究では、第一に、レベルシフトの確率について 3 項のオーダード・プロビット³をあてはめ、レベル上昇、下落、不変とし、上昇と下落を区別するように拡張した。また、レベルシフトの大きさ方向についても、上昇、下落に対応するように分布が切断されるように拡張をおこなった。さらに、本研究ではレベルシフトの発生の予測可能性のみならず、大きさ方向の短期的な予測可能性をも探るべく Johannes, Kumar, and Polson (1999)と同様にレベルシフトの大きさ方向の説明変数として一期前の外生変数を導入した。また、このモデルについての Markov Chain Monte Carlo 法に基づく推定法を示した。また従来の Albert and Chib(1993a)によるオーダード・プロビット・モデルのMCMCによる取り扱いにおいてはサンプリングにおける自己相関の高さが指摘されており、本研究では Liu and Sabatti (2000)の Generalized Gibbs Sampler を用いた。

以上のように拡張した RLS モデルについて、シミュレーションデータを用いて分析を行った。結果として、パラメーターの推定、および、レベルシフトのタイミング、大きさ、方向についても良好な推定値を得られることがわかった。また、金利データを用いて Hamilton 型のビジネスサイクルモデルの推定もおこなっている。

本論文は以下のような構成になっている。第 2 節では拡張された RLS モデルの説明をおこなう。第 3 節では拡張された RLS モデルにおける MCMC による推定法について説明をおこなう。第 4 節ではシミュレーションデータを用いた分析の結果について報告する。第 5 節では実際に金利の月次データをもちいて実証研究をおこなう。第 6 節では結論と今後の発展について述べる。

2 拡張された RLS モデル

³ この問題を解決するためには、他に多項ロジット・プロビット・モデルやフリクション・モデルの使用が考えられる。多項ロジットモデルとフリクションモデルについては、松浦・竹澤(2000)参照のこと。今後、このモデルセレクション問題についても言及すべきである。

この節では、McCulloch and Tsay (1993)、Gerlach, Carter, and Kohn (2000)ので取り上げられている Random Level Shift モデルを拡張する。従来これらの研究ではレベルシフトを取り上げるにあたり、ある確率変数に従うレベルシフトの大きさと方向が各期毎に存在し、そして、この変数が確率的に出現すると仮定する。すなわち、ベルヌイ分布などに従うレベルシフトの発生を示す I_t とレベルシフトの大きさ方向を示す確率変数 S_t から構成され、レベルのシフトが発生したら $I_t = 1$ 、そうでなければ、 $I_t = 0$ となり、そのときに生じべきレベルシフトの方向および大きさは S_t となる。ここで初期レベルを μ_y とし、

$\alpha_t = \sum_{k=1}^t I_k S_k$ とする。 $\alpha_0 = 0$ であると仮定すると、 t 期のレベルは $\mu_t + \alpha_t$ で表される。ここで、実際に観測される系列を Y_t とすると、シンプルな RLS モデルは以下のようにあらわされる。

$$Y_t = \mu_y + \alpha_t + \sigma_y z_t^y, \quad z_t^y \sim i.i.d.N(0,1), \text{ for } t = 1, 2, \dots, T, \quad (2.1)$$

$$\alpha_t = \alpha_{t-1} + I_t S_t, \quad (2.2)$$

$$\Pr(I_t = 1) = \Phi(\mu_I), \quad \text{for } \lambda \in [0, 1], \quad (2.3)$$

$$S_t = \mu_s + \sigma_s z_t^s. \quad z_t^s \sim i.i.d.N(0,1), \text{ for } t = 1, 2, \dots, T, \quad (2.4)$$

ここで、 $\Phi(\cdot)$ は正規分布の累積密度関数を示す。すなわち、(2.3)式はプロビットモデルである。RLS モデルにおいては、(2.2)式のように定式化することによりレベルが階段状に変化していく構造を表現することができる。このモデルをギブスサンプリングで推定することにより、それぞれのパラメーターと各期のレベル $\mu_t + \alpha_t$ を推定することができる。

ここで、 μ_I が何らかの外生変数 X によって説明されている、例えば $\mu_I = x\beta_I$ とすると、 β_I が正ならば、 x が上昇したときのみレベルシフトが生じることになる。これは、実際のデータ、特に経済データを取り扱う上では不都合である。また同時に、 S_t の説明変数にも同様に説明変数として x が存在している、すなわち $\mu_S = x\beta_S$ とすると、 β_S が正ならば、レベルシフトが発生したときに、レベルシフトの方向は正に偏ってしまう。つまり、従来の RLS モデルにおいて外生変数による回帰分析を行う上では問題が 2 点存在する。まず第一には外生変数が上昇あるいは下落したときのどちらか片方のみレベルシフトの確率が上昇する、第 2 には、レベルシフトの発生と大きさ方向の両方に共通の説明変数を導入したときに、発生したレベルシフトの方向に偏りが生じるという問題がある。

上記の問題を解消するために本研究では RLS を以下のように拡張した。問題点 1 に対応し、従来のレベルの変化および維持の 2 状態からレベルの上昇、下落および維持の 3 状態へと拡張を行った。具体的には 3 項のオーダード・プロビット・モデルを用いることにより上記の 3 状態を明示的にモデルへと導入した。また、この 3 状態に対応し S_t をトランケイトすることによりレベルシフトと S_t との相関の表現を可能とした。モデルは以下のように

示される。

$$Y_t = \alpha_t + W_t, \quad (2.5)$$

$$W_t = \mathbf{x}_t^w \boldsymbol{\beta}_w + \sigma_w z_t^w \quad z_t^w \sim i.i.d.N(0,1), \text{ for } t = 1, 2, \dots, T, \quad (2.6)$$

$$\alpha_t = \alpha_{t-1} + I_t S_t, \quad (2.7)$$

$$J_t \sim \text{ordered probit}(\mathbf{x}_t^v \boldsymbol{\beta}_v, u, l), \quad (2.8)$$

$$I_t = 0, \text{ if } J_t = 0 \\ I_t = 1, \text{ if } J_t = -1, \text{ or } 1$$

$$V_t = \mathbf{x}_t^v \boldsymbol{\beta}_v + z_t^v, \quad z_t^v \sim i.i.d.N(0,1), \text{ for } t = 1, 2, \dots, T, \quad (2.9)$$

$$S_t = \mathbf{x}_t^s \boldsymbol{\beta}_s + \sigma_s z_t^s, \quad z_t^s \sim i.i.d.N(0,1), \text{ for } t = 1, 2, \dots, T, \quad (2.10)$$

ここで、 z_t^w 、 z_t^v 、 z_t^s はそれぞれ互いに独立を仮定する。 V_t は、Albert and Chib(1993a)の方法を用いてオーダード・プロビット・モデルを MCMC 推定する際に用いる潜在変数である。 u, l は、オーダード・プロビットにおける閾値を示し、 $l < u$ である。また、識別の問題上 $u = 0$ を仮定する。また、 $\mathbf{x}_t^w, \mathbf{x}_t^v, \mathbf{x}_t^s$ は説明変数であり、それぞれ、 k_w, k_v, k_s 個の外生変数から構成される。 $E[S_t] = 0$ を仮定し、そのために \mathbf{x}_t^s は定数項を含まず、その他の外生変数からは標本平均を引いてある。 $\mathbf{x}_t^w, \mathbf{x}_t^v$ についても同様に定数項以外は標本平均を引いてある。このようにすることにより、 $\beta_{w,1}$ は初期レベルを表すことになり、 $\beta_{v,1}$ は V_t の無条件の平均を表すことになる。

レベルシフトのルールは以下のとおりである。State1 をレベルの上昇、State2 をレベルの現状維持、State3 をレベルの下降とすると、

State1 : $V_t \geq u$	ならば $J_t = 1, I_t = 1, S_t > 0$.
State2 : $l < V_t < u$	ならば $J_t = 0, I_t = 0, S_t$ は切断されない。
State3 : $l \geq V_t$	ならば $J_t = -1, I_t = 1, S_t < 0$.

となる。

3 MCMC による推定手順

この節では、本研究における拡張された RLS モデルの推定法を説明する。このモデルは非線形性や潜在変数の多さからクラシカルな方法でアナリティカルに尤度を評価することが難しい。そこでベイズ統計学を用いたコンピューターインテンシブな方法、マルコフ連鎖モンテカルロ法(MCMC)を用いる。

前節で提案したモデルについて、パラメーター集合 θ は、

$$\theta = \{\beta_w, \sigma_w^2, \beta_v, l, \beta_s, \sigma_s^2\},$$

となる。ギブスサンプラーを用いてこのモデルを推定するにあたり、以下のように変数を定義する。

$$\begin{aligned} \text{定義: } \mathbf{Y} &= (y_1, \dots, y_T)', \\ \boldsymbol{\alpha} &= (\alpha_1, \dots, \alpha_T)', \\ \mathbf{J} &= (J_1, \dots, J_T)', \\ \mathbf{I} &= (I_1, \dots, I_T)', \\ \mathbf{V} &= \{V_1, \dots, V_t\}', \\ \mathbf{S} &= (S_1, \dots, S_T)', \\ \Theta &= \{\mathbf{V}, \mathbf{S}, \theta\} \end{aligned}$$

また、 Θ_{-i} は、 Θ の i 番目の要素を抜いた集合を表している。事後分布の表現は以下のようになる。

$$f(\Theta | \mathbf{Y}) \propto f(\mathbf{Y} | \mathbf{S}, \mathbf{V}, \theta) f(\mathbf{S} | \mathbf{V}, \theta) f(\mathbf{V} | \theta) f(\theta), \quad (3.1)$$

ここで、

$$f(\mathbf{Y} | \mathbf{S}, \mathbf{V}, \theta) = \prod_{t=1}^T \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_w^2}} \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{(y_t - \alpha_t - \mathbf{x}_t^w \boldsymbol{\beta}_w)^2}{\sigma_w^2}\right] \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} f(\mathbf{S} | \mathbf{V}, \theta) &= \prod_{t=1}^T \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_s^2}} \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{(S_t - \mathbf{x}_t^s \boldsymbol{\beta}_s)^2}{\sigma_s^2}\right] \\ &\times [\mathbf{1}_{(-\infty, 0]}(S_t) \mathbf{1}_{(-\infty, l]}(V_t) + \mathbf{1}_{(-\infty, \infty)}(S_t) \mathbf{1}_{(l, 0]}(V_t) + \mathbf{1}_{(0, \infty)}(S_t) \mathbf{1}_{(0, \infty)}(V_t)] \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$f(\mathbf{V} | \boldsymbol{\theta}) = \prod_{t=1}^T \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}(V_t - \mathbf{x}_t^v \boldsymbol{\beta}_v)^2\right] \quad (3.4)$$

$$f(\boldsymbol{\theta}) = f(\beta_w) f(\beta_v) f(\beta_s) f(\sigma_w^2) f(\sigma_s^2) f(l) \quad (3.5)$$

$\mathbf{1}_{(a,b)}(C)$ はインデックス・バリアブルで、確率変数 C が区間 a, b に含まれれば 1 そうでなければ 0 となるような変数である。 $f(\boldsymbol{\theta})$ は結合事前分布であり、個々の事前分布はそれぞれ独立であると仮定する。 このモデルは、オーダードプロビットモデルをモデル内に内包している。 オーダード・プロビット・モデルの MCMC 推定において、Albert and Chib(1993a)の方法ではサンプリングされた標本の自己相関が高く定常分布への収束が遅いということが過去の研究で指摘されている。本研究では Liu and Sabatti (2000)の Generalized Gibbs Sampler⁴を用いる事により対応している。

ギブスサンプリングの手順は以下のとおりである。

3.0 $\boldsymbol{\theta}$ に適当な初期値 $\boldsymbol{\theta}^0$ を与える。

3.1 $f(S_t | \boldsymbol{\theta}_{-S_t}^0, \mathbf{Y})$ から S_t^1 をサンプリングし、 $\boldsymbol{\theta}^0$ 内の S_t^0 をアップデートする。

3.2 $f(V_t | \boldsymbol{\theta}_{-V_t}^0, \mathbf{Y})$ から V_t^1 をサンプリングし、 $\boldsymbol{\theta}^0$ 内の V_t^0 をアップデートする。このとき副産物として J_t が得られる。

3.3 $f(l | \boldsymbol{\theta}_{-l}^0, \mathbf{Y})$ から l^1 をサンプリングし、 $\boldsymbol{\theta}^0$ 内の l^0 をアップデートする。

3.0 からスタートし、3.1、3.2 を各 t ($t=1, \dots, T$) について繰り返しサンプリングを行う、その後 3.3 のサンプリング後 3.1 に戻る。これらを n 回繰り返し、最初の m 回のバーン・インを捨て、得られたサンプルの標本平均を取ることでポステリア・ミーンを得ることができる。ギブスサンプラーの定常分布への収束の判定は Geweke(1992)を用いた。以下では上記のステップごとの潜在変数およびパラメータのサンプリング方法を示す。

⁴ 具体的にはギブスランの中で

$$g^2 \sim \text{Gamma}\left(\frac{T+k_v+J-2}{2}, \frac{\sum_{t=1}^T (V_t - \mathbf{x}_t^v \boldsymbol{\beta}_v)^2}{2}\right)$$

を発生させ、 $(\mathbf{V}, \boldsymbol{\beta}_v, \gamma) = (g\mathbf{V}, g\boldsymbol{\beta}_v, g\gamma)$ とアップデートすることにより行われる。詳しくは、Liu and Sabatti (2000)参照のこと。この方法は、Nandram and Chen(1996)の方法よりも簡単であり、さらに、若干効率的であると彼等は述べている。

3.1 V_t および J_t のサンプリング

基本的には Albert and Chib(1993a)の方法を用いてオーダードプロビット部分のサンプリングが行われるが、通常のオーダードプロビットモデルと異なり、 J_t は潜在変数なので 3.1 式の事後分布から J_t 、 V_t は同時に発生させなければならない。また、ここではオーダード・プロビットを用いているので三状態(上昇、下降、現状維持)を持つが、 S_t を条件としたときには、場合分けにより 2 状態として取り扱うことができる。よって、 S_t を条件とすることによりレベルシフトが発生したかどうかだけを考えればよい。

S_t の符号を条件とした Full Conditional を考える。最初に $S_t > 0$ の場合を考えると、

$$\begin{aligned} & f(V_t | \mathbf{Y}, \mathbf{S}, \mathbf{V}_{-t}, \boldsymbol{\theta}) \\ &= f(V_t | V_t > 0, \mathbf{Y}, \mathbf{S}, \mathbf{V}_{-t}, \boldsymbol{\theta}) P(V_t > 0 | \mathbf{Y}, \mathbf{S}, \mathbf{V}_{-t}, \boldsymbol{\theta}) \\ &+ f(V_t | l < V_t \leq 0, \mathbf{Y}, \mathbf{S}, \mathbf{V}_{-t}, \boldsymbol{\theta}) P(l < V_t \leq 0 | \mathbf{Y}, \mathbf{S}, \mathbf{V}_{-t}, \boldsymbol{\theta}) \end{aligned}$$

これより、 S_t の符号を条件とした時、確率 $P(V_t > 0 | \mathbf{Y}, \mathbf{S}, \mathbf{V}_{-t}, \boldsymbol{\theta})$ で $f(V_t | V_t > 0, \mathbf{Y}, \mathbf{S}, \mathbf{V}_{-t}, \boldsymbol{\theta})$ からサンプリングし、確率 $P(l < V_t \leq 0 | \mathbf{Y}, \mathbf{S}, \mathbf{V}_{-t}, \boldsymbol{\theta})$ で $f(V_t | l < V_t \leq 0, \mathbf{Y}, \mathbf{S}, \mathbf{V}_{-t}, \boldsymbol{\theta})$ からサンプリングを行えばよいことがわかる。すなわち、 $J_t = 1$ の確率が $P(V_t > 0 | \mathbf{Y}, \mathbf{S}, \mathbf{V}_{-t}, \boldsymbol{\theta})$ であり、 $J_t = 0$ の確率が $P(l < V_t \leq 0 | \mathbf{Y}, \mathbf{S}, \mathbf{V}_{-t}, \boldsymbol{\theta})$ となっていることがわかる。またここで、 $P(V_t > 0 | \mathbf{Y}, \mathbf{S}, \mathbf{V}_{-t}, \boldsymbol{\theta}) + P(l < V_t \leq 0 | \mathbf{Y}, \mathbf{S}, \mathbf{V}_{-t}, \boldsymbol{\theta}) = 1$ より、

$$P(V_t > 0 | \mathbf{Y}, \mathbf{S}, \mathbf{V}_{-t}, \boldsymbol{\theta}) = p_t^{S_t > 0}$$

$$P(l < V_t \leq 0 | \mathbf{Y}, \mathbf{S}, \mathbf{V}_{-t}, \boldsymbol{\theta}) = 1 - p_t^{S_t > 0}$$

となる。これより、 $S_t \leq 0$ の場合も同様に考えられるので、 S_t を条件としたレベルシフトの確率 $p_t^{S_t > 0}$, $p_t^{S_t \leq 0}$ が求められれば、 $J_t^{S_t > 0} = 1 \text{ or } 0$ 、 $J_t^{S_t \leq 0} = -1 \text{ or } 0$ はそれぞれベルヌイ分布に従う確率変数であることから容易にサンプリング可能である。さらに、この $p_t^{S_t > 0}$, $p_t^{S_t \leq 0}$ によりサンプリングされた J_t に対応し、 V_t は以下のようにサンプリングすればよい。

$$J_t = 0 \text{ のケース} \quad V_t \sim N(\mathbf{x}_t^y \boldsymbol{\beta}^y, 1)_{[l, 0]}$$

$$J_t = 1 \text{ のケース} \quad V_t \sim N(\mathbf{x}_t^y \boldsymbol{\beta}^y, 1)_{[0, \infty]}$$

$J_t = -1$ のケース

$$V_t \sim N(\mathbf{x}_t^v \boldsymbol{\beta}^v, 1)_{[-\infty, l]}$$

また、 $p_t^{S_t > 0}$ は、以下のように与えられる。

$$\begin{aligned} p_t^{S_t > 0} &= P(V_t > 0 \mid \mathbf{Y}, \mathbf{S}, \mathbf{V}_{-t}, \boldsymbol{\theta}) \\ &= \frac{P(V_t > 0 \mid \mathbf{Y}, \mathbf{S}, \mathbf{V}_{-t}, \boldsymbol{\theta})}{P(V_t > 0 \mid \mathbf{Y}, \mathbf{S}, \mathbf{V}_{-t}, \boldsymbol{\theta}) + P(l < V_t \leq 0 \mid \mathbf{Y}, \mathbf{S}, \mathbf{V}_{-t}, \boldsymbol{\theta})} \\ &= \frac{P(V_t > 0 \mid \mathbf{Y}, \mathbf{S}, \mathbf{V}_{-t}, \boldsymbol{\theta})}{P(l < V_t \leq 0 \mid \mathbf{Y}, \mathbf{S}, \mathbf{V}_{-t}, \boldsymbol{\theta})} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{P(l < V_t \leq 0 \mid \mathbf{Y}, \mathbf{S}, \mathbf{V}_{-t}, \boldsymbol{\theta})}{P(V_t > 0 \mid \mathbf{Y}, \mathbf{S}, \mathbf{V}_{-t}, \boldsymbol{\theta})}} \end{aligned}$$

これより、 $J_t = 1$ と $J_t = 0$ のオッズ比 $O_t^{S_t > 0}$ は、 $\frac{P(V_t > 0 \mid \mathbf{Y}, \mathbf{S}, \mathbf{V}_{-t}, \boldsymbol{\theta})}{P(l < V_t \leq 0 \mid \mathbf{Y}, \mathbf{S}, \mathbf{V}_{-t}, \boldsymbol{\theta})}$ となり、 $S_t > 0$

を条件とした full conditional における $J_t = 1$ の確率を示すベルヌイパラメーターは、

$$p_t^{S_t > 0} = \frac{O_t^{S_t > 0}}{1 + O_t^{S_t > 0}} \quad (3.6)$$

と表される。ここで、オッズ比 $O_t^{S_t > 0}$ について考えると、

$$\begin{aligned} O_t^{S_t > 0} &= \frac{P(V_t > 0 \mid \mathbf{Y}, \mathbf{S}, \mathbf{V}_{-t}, \boldsymbol{\theta})}{P(l < V_t \leq 0 \mid \mathbf{Y}, \mathbf{S}, \mathbf{V}_{-t}, \boldsymbol{\theta})} \\ &= \frac{P(J_t = 1 \mid \mathbf{x}_t^v \boldsymbol{\beta}_v) f(\mathbf{Y} \mid J_t = 1, \mathbf{Y}, \mathbf{S}, \mathbf{V}_{-t}, \boldsymbol{\theta})}{P(J_t = 0 \mid \mathbf{x}_t^v \boldsymbol{\beta}_v) f(\mathbf{Y} \mid J_t = 0, \mathbf{Y}, \mathbf{S}, \mathbf{V}_{-t}, \boldsymbol{\theta})} \\ &= \frac{1 - \Phi(-\mathbf{x}_t^v \boldsymbol{\beta}_v)}{\Phi(-\mathbf{x}_t^v \boldsymbol{\beta}_v) - \Phi(l - \mathbf{x}_t^v \boldsymbol{\beta}_v)} \prod_{l=t}^T \frac{\exp \left[-\frac{1}{2} \frac{(Y_l - \alpha_{t-1} - I_t S_t - \sum_{k=t+1}^l I_k S_k - \mathbf{x}_t^w \boldsymbol{\beta}_w)^2}{\sigma_w^2} \right]}{\exp \left[-\frac{1}{2} \frac{(Y_l - \alpha_{t-1} - \sum_{k=t+1}^l I_k S_k - \mathbf{x}_t^w \boldsymbol{\beta}_w)^2}{\sigma_w^2} \right]} \end{aligned}$$

となる。 $\Phi(\cdot)$ は、正規分布の累積密度関数を示している。この $O_t^{S_t > 0}$ を用いて J_t のサンプリングを行えばよい。 S_t が負のケースにおいても同様な方法でサンプリングすることができる。 $O_t^{S_t \leq 0}$ について、

$$O_t^{S_t \leq 0} = \frac{\Phi(l - \mathbf{x}_t^v \boldsymbol{\beta}_v)}{\Phi(-\mathbf{x}_t^v \boldsymbol{\beta}_v) - \Phi(l - \mathbf{x}_t^v \boldsymbol{\beta}_v)} \prod_{l=t}^T \frac{\exp \left[-\frac{1}{2} \frac{(Y_l - \alpha_{t-1} - I_t S_t - \sum_{k=t+1}^l I_k S_k - \mathbf{x}_t^w \boldsymbol{\beta}_w)^2}{\sigma_w^2} \right]}{\exp \left[-\frac{1}{2} \frac{(Y_l - \alpha_{t-1} - \sum_{k=t+1}^l I_k S_k - \mathbf{x}_t^w \boldsymbol{\beta}_w)^2}{\sigma_w^2} \right]}$$

を用いてサンプリングをおこなえばよい。

3.2 S_t のサンプリング

オーダード・プロビット・モデルを採用したことにより場合分けが発生し、 J_t のとる値により 3 通りに場合分けされる。基本的には **Full Conditional Distribution**

$$\begin{aligned} f(S_t | \boldsymbol{\Theta}_{-S_t}, \mathbf{Y}) &\propto f(S_t | J_t, \boldsymbol{\beta}_s, \sigma_s^2) f(\mathbf{Y} | \boldsymbol{\Theta}) \\ &\propto f(S_t | J_t, \boldsymbol{\beta}_s, \sigma_s^2) \prod_{l=t}^T f(Y_l | \boldsymbol{\Theta}) \end{aligned} \quad (3.7)$$

から、 S_t はサンプリングされる。ただし、 $J_t = 0$ の時には S_t は $t+1$ 期以降に影響を及ぼさないで、

$$f(S_t | \boldsymbol{\Theta}_{-S_t}, \mathbf{Y}) \propto f(S_t | J_t = 0, \boldsymbol{\beta}_s, \sigma_s^2)$$

となり、すなわち、

$$S_t | \cdot \sim N(\mu_s, \sigma_s^2),$$

からサンプリングを行えばよい。一方、 $J_t = 1, -1$ に関して、(3.7)式を S_t について整理すると、

$$f(S_t | \boldsymbol{\Theta}_{-S_t}, \mathbf{Y}) \propto \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{\left(S_t - \frac{\sigma_y^2 \mathbf{x}_t^s \boldsymbol{\beta}_s + \sigma_s^2 \sum_{l=t}^T A_l}{\sigma_y^2 + (T-t+1)\sigma_s^2} \right)^2}{\frac{\sigma_y^2 \sigma_s^2}{\sigma_y^2 + (T-t+1)\sigma_s^2}} \right]$$

として与えられる。ただし、

$$A_l = Y_l - \mathbf{x}_l^w \boldsymbol{\beta}_w - \alpha_{l-1} - \sum_{k=t+1}^l I_k S_k$$

とする。このことから、 S_t は、正規分布からサンプリングすればよいことがわかるが、 $J_t = 1$ の時には S_t は正の値をとり、 $J_t = -1$ の時には負の値のみとることから、トランケーションが必要なことがわかる。このことから、 $J_t = 1$ のときは、

$$S_t | \cdot \sim N \left(\frac{\sigma_y^2 \mathbf{x}_t^s \boldsymbol{\beta}_s + \sigma_s^2 \sum_{l=t}^T A_l}{\sigma_y^2 + (T-t+1)\sigma_s^2}, \frac{\sigma_y^2 \sigma_s^2}{\sigma_y^2 + (T-t+1)\sigma_s^2} \right) I[0, \infty],$$

からサンプリングを行えばよく、 $J_t = -1$ の時には、

$$S_t | \cdot \sim N \left(\frac{\sigma_y^2 \mathbf{x}_t^s \boldsymbol{\beta}_s + \sigma_s^2 \sum_{l=t}^T A_l}{\sigma_y^2 + (T-t+1)\sigma_s^2}, \frac{\sigma_y^2 \sigma_s^2}{\sigma_y^2 + (T-t+1)\sigma_s^2} \right) I[-\infty, 0],$$

からサンプリングを行えばよい。

以下では、パラメーター集合 $\boldsymbol{\theta}$ のサンプリングについて説明する。本研究では、プレイヤーは以下のように、閾値 l には正規分布、 $\boldsymbol{\beta}$ には多変量正規分布、 σ_w^2, σ_s^2 にはそれぞれ逆ガンマ分布を仮定した。

$$l \sim N(a_0, b_0)$$

$$\boldsymbol{\beta}_w, \boldsymbol{\beta}_v, \boldsymbol{\beta}_s \sim MVN(\mathbf{C}_0, \mathbf{D}_0^{-1})$$

$$\sigma_w^2, \sigma_s^2 \sim IG(e_0, f_0)$$

3.4 l のサンプリング

l は以下のような分布に従う。

$$l \sim N(a_0, b_0)I[\max(\mathbf{Y}; Y_t \leq l), \min(\mathbf{Y}; l < Y_t < u)]$$

3.5 $\boldsymbol{\beta}$ のサンプリング

W, V, S についてそれぞれ多変量正規分布から発生させる。 $\mathbf{Y}, \mathbf{V}, \mathbf{S}, \sigma_w^2, \sigma_s^2$ 所与として $\boldsymbol{\beta}_w, \boldsymbol{\beta}_v, \boldsymbol{\beta}_s$ 以下のような正規分布に従う。

$$\boldsymbol{\beta}_w \sim MVN((\mathbf{D}_0 + \mathbf{X}_w' \mathbf{X}_w)^{-1}(\mathbf{D}_0 \mathbf{C}_0 + \mathbf{X}_w' \mathbf{W}), \sigma_w^2 (\mathbf{D}_0 + \mathbf{X}_w' \mathbf{X}_w)^{-1})$$

$$\boldsymbol{\beta}_v \sim MVN((\mathbf{D}_0 + \mathbf{X}_v' \mathbf{X}_v)^{-1}(\mathbf{D}_0 \mathbf{C}_0 + \mathbf{X}_v' \mathbf{V}), (\mathbf{D}_0 + \mathbf{X}_v' \mathbf{X}_v)^{-1})$$

$$\boldsymbol{\beta}_s \sim MVN((\mathbf{D}_0 + \mathbf{X}_s' \mathbf{X}_s)^{-1}(\mathbf{D}_0 \mathbf{C}_0 + \mathbf{X}_s' (\mathbf{S} - \bar{\mathbf{S}})), \sigma_s^2 (\mathbf{D}_0 + \mathbf{X}_s' \mathbf{X}_s)^{-1})$$

3.6 σ_w^2, σ_s^2 のサンプリング

σ_w^2, σ_s^2 はそれぞれ以下のような分布から発生させられる。

$$\sigma_w^2 \sim IG\left(e_0 + \frac{T + k_w}{2}, \left(\frac{1}{f_0} + \frac{\sum_{t=1}^T Y_t - \alpha_t - \mathbf{x}_t^w \boldsymbol{\beta}_w}{2}\right)^{-1}\right)$$

$$\sigma_s^2 \sim IG\left(e_0 + \frac{T+k_s}{2}, \left(\frac{1}{f_0} + \frac{\sum_{t=1}^T S_t - \mathbf{x}_t^s \boldsymbol{\beta}_s}{2}\right)^{-1}\right)$$

以上のサンプリングを順次繰り返すことによりギブスランが得られる。

4 シミュレーションデータによる推定

この節では、母パラメーターを既知とした上で人工的にシミュレーションデータを作成し、前節までで説明をおこなった、オーダード・プロビット型のランダムレベルシフトモデルのパラメーター推定をおこない、推定結果を検証する。MCMCで推定する事により、パラメーターの推定だけでなく、レベルを表す潜在変数 $\hat{\alpha}_t$ を各期について発生させることができる。人工的なデータを発生する場合には、真のレベル α_t も既知であるので、レベルシフトの大きさタイミングが正しく推定されているかを比較することができる。この節では以上のように(1)パラメーターの推定と、(2)レベルシフトの大きさ方向およびタイミングの推定、の二点について注目しながら議論を進める。

シミュレーションデータは以下のように作成した。外生変数は定数項のみとし、母パラメーターの値はそれぞれ $\beta_w = 3, \beta_v = -1.960, \sigma_w^2 = 1, \sigma_s^2 = 4, l = -3.920$ とした。ただし、 $\beta_s = 0$ の仮定を置いているため外生変数がない場合は β_s は推定する必要はない。標本数は $T=100$ とした。これにより、100個の系列の内、レベルシフトが約5回あることが期待される。実際に発生させたデータは図1に示している。レベルシフトは合計7回(上昇4回 $t=22, 57, 63, 69$ 、下降3回 $t=24, 41, 80$)発生し、このデータは8個の区間に分けられ、すなわち、8個のレベルを持つ。また、この系列は実際には単位根系列ではないが、ADFテストをおこなったところ単位根であるという帰無仮説を棄却できない。(表1 . 基本統計量参照)

ギブスサンプリングによりパラメーターの事後分布を求めるにあたり、サンプリングを20000回繰り返し、最初の10000回をバーンインとした。プライヤーパラメーターは、 $a_0 = 0, b_0 = 1000, \mathbf{C}_0 = \mathbf{0}, \mathbf{D}_0^{-1} = (b_0 \times \mathbf{I}_{2 \times 2})^{-1}, e_0 = 3, f_0 = 25$ である。

サンプリングされた事後分布は図2に、事後平均は表2に示している。図2は、 $\beta_w, \beta_v, \sigma_w^2, \sigma_s^2, l$ についてそれぞれのギブスラン、事後分布、自己相関をまとめたもので

ある。表 2 について、P925 と P025 は 95%信用区間であり、CD は、Geweke(1992)の収束判定のための統計量である。これは正規分布に従い、帰無仮説は個々の該当パラメーターについて定常分布に収束している、である。

CD より、各パラメーターについて定常分布に収束していることがわかる。また、信用区間より全パラメーターについてについては事後分布が母パラメーターと等しいという帰無仮説は棄却されない。このことからパラメーター推定における精度には問題ないといえる。

ギブスサンプリング内で J_t 、 S_t 、 β_w がサンプリングされていることから、これらの関数として各期のレベルをサンプリングすることができる。これを平均することにより各期のレベルの事後平均を求めることができる。これをプロットしたものが図 1 における alpha

である。同様に I_t がサンプリングできレベルシフトの確率の事後平均 \hat{p}_t は、 $\sum_{i=m+1}^n I_t^{(i)}$ で与

えられ、それをプロットしたものが図 1 における確率である。まず、確率についてみるとピークが 5 回推定された。それぞれ 21,28,41,63,80 期であり alpha もその前後で大きく変化している。真のレベルと比較しても 41 期、63 期、80 期に関しては的中している。また 22 期に関してもわずか 1 期ずれただけに過ぎない。また、シミュレーション時には 63 期、69 期に比較的小さな正のレベルシフトが発生しているが、推定時には認識できなかった。また、22 期 24 期のように大きく変化しすぐ戻ってくるような変化は異常値として捉えているようである。

5 金利データによる実証例

この節では実際に金利(コールレート)の月次データを用いた実証研究をおこなう。標本期間は 1985 年 10 月から 1994 年 1 月までであり、標本数は 100 である。基本統計量および単位根検定の統計量は、表 1 に示してある。単位根検定の結果として、このコールレートの系列は単位根であるという帰無仮説を棄却できない。一方、この標本期間はバブル期を含み、単なる単位根系列ではなく、タイムトレンド付の単位根系列であった可能性がある。そこで、以下のような単純化した Hamilton 型のモデルを考える。

$$\Delta Y_t = \alpha_t + W_t$$

ここで、 ΔY_t は金利の対数値の階差を取ったものである。このモデルでは、 α_t がタイムトレンドを示すパラメーターとなる。 α_t, W_t は前節までと同様とする。Hamilton(1989)では、 α_t を好況期不況期の 2 状態とし分析をおこなっているが、RLS モデルを用いることにより状態数を考慮せずに分析することができる。

各パラメーターの推定値は表 3、データおよび α_t の事後平均は図 4、各パラメーターの事後分布は図 5 に示したとおりである。

パラメーターの推定値に関しては定数項(V)が-1.994、閾値が-3.963 であることより約 5% の確率でレベルシフトが発生することがわかる。しかし、図 4 にプロットされた確率の事後平均から比較的まんべんなくレベルが推移していることがわかる。これは、シミュレーションデータのように劇的なレベルの変化が標本期間中にないからであると考えられる。

α_t の事後平均からトレンドの変化点がわかる。金利の下方トレンドから上方トレンドへの変化点は、1987 年 8 月であり、上方トレンドから下方トレンドへの変化点は、1990 年 11 月である。

6 結論と今後の課題

本研究では、RLS モデルにおけるレベルシフトが生起する確率を定式化するにあたり、新たにオーダード・プロビット・モデルを導入した。これにより、従来の RLS モデルにおいては不可能であったレベルの上昇と下落の区別が可能となった。また、オーダード・プロビット型 RLS モデルにおける MCMC 法による推定手順を示し、シミュレーションデータを用いて分析をおこなった。結果として、パラメーター推定および各区間におけるレベルの両者ともに正確な推定が可能であることが示された。

本研究では依然としてし、プロビットモデルとオーダード・プロビットモデル間の妥当性の高さには言及していない。どちらのモデルの妥当性が高いかについては今後 **Marginal Likelihood** によるモデル選択分析をおこなわなければならない。さらには、その他の多項選択モデルやフリクション・モデルについても同様にモデル選択分析する必要がある。本研究では単純化のために時系列構造を持たせていないが、実際には観測される変数だけでなく潜在変数の両方について時系列構造を持っている可能性があると考えられるので、この点についても改善させられるべきである。

参考文献

- 松浦克巳・竹澤康子(2000)「日銀の公定歩合政策変更について」松浦克巳・吉野直行・米沢康博編著『変革期の金融資本市場』日本評論社
- 渡部敏明(1999)『確率的ポラティリティー変動モデル』財団法人三菱経済研究所
- Asako, K. and S. Kanoh (1997) “Objectives of Japanese Monetary Policy - Estimation by Time-Varying Logit Model -”, 『経済研究』, vol. 48, pp. 351-367.
- Albert, J. H. and S. Chib (1993a), “Bayesian Analysis of Binary and Polychotomous Response Data”, *Journal of American Statistical Association*, Vol. 88, No. 422, pp. 669-679
- Albert, J. H. and S. Chib (1993b), “Bayesian Inference via Gibbs Sampling of Autoregressive Time Series Subject to Markov Mean and Variance Shifts”, *Journal of Business & Economic Statistics*, vol. 11, No. 1, pp. 1-15.
- Barnette, G., R. Kohn, and S. Sheather (1993), “Markov Chain Monte Carlo Estimation of Autoregressive Models with Application to Metal Pollutant Concentration in Sludge”, in *Proceedings of the Australia-Japan Workshop on Stochastic Models in Engineering, Technology and Management*, pp. 26-36.
- Carlin, B. P., A. E. Gelfand, and A. F. M. Smith (1992), “Hierarchical Bayesian Analysis of Change Point Problems”, *Applied Statistics*, 41, pp. 389-405.
- Chen, C. and G. C. Tiao (1990), “Random Level-Shift Time Series Models, ARIMA Approximations, and Level- Shift Detection”, *Journal of Business & Economic Statistics*, vol. 8, No. 1, pp. 83-97.
- Chen, C. and L. Liu (1993), “Joint Estimation of Model Parameters and Outlier Effects in Time Series”, *Journal of American Statistical Association*, Vol. 88, No. 421, pp. 284-297.
- De Jong, P. and J. Penzer (1998), “Diagnosing Shocks in Time Series”, *Journal of American Statistical Association*, Vol. 93, No. 442, pp. 796-806.
- Gerlach, R., C. Carter, and R. Kohn (2000), “Efficient Bayesian Inference for Dynamic Mixture Models”, *Journal of American Statistical Association*, Vol. 95, No. 451, pp. 819-828.
- Geweke, J. (1992), “Evaluating the Accuracy of Sampling-Based Approaches to the Calculation of Posterior Moments”, in J. M. Bernardo, J. O. Berger, A. P. Dawid, and A. F. M. Smith(eds) *Bayesian Statistics 4*, pp.169-193.
- Hamilton, J. D. (1989), “A New Approach to the Econometric Analysis of Nonstationary Time Series and the Business Cycle”, *Econometrica*, 57, pp. 357-384.
- Johannes, M., R. Kumar, and N. G. Polson (1999), “State Dependent Jump Models:

- How do US Equity Indices Jump?", Chicago University, *mimeo*.
- Johannes, M., B. Eraker, and N. G. Polson (1999), "Jumps to Returns and Volatility in Continuous Time: Time Series Evidence," Chicago University, *mimeo*.
- Lamoureux, C. and W. D. Lastrapes (1990), "Persistence in Variance, Structural Changes and the GARCH Model", *Journal of Business and Economic Statistics*, 8, pp. 225-234.
- Le, D. N., D. Martin, and A. E. Raftery (1996), "Modeling Flat Stretches, Bursts, and Outliers in Time Series Using Mixture Transition Distribution Models", *Journal of American Statistical Association*, Vol. 91, No. 436, pp. 1504-1515.
- Liu, J. S. and C. Sabatti (2000), "Generalised Gibbs Sampler and Multigrid Monte Carlo for Bayesian Computation", *Biometrika*, 87, 2, pp. 353-369.
- McCulloch, R. E. and R. S. Tsay (1993), "Bayesian Inference and Prediction for Mean and Variance Shifts in Autoregressive Time Series", *Journal of American Statistical Association*, Vol. 88, No. 423, pp. 968-978.
- Merton, R. (1976) "Option Pricing when the Underlying Stock Returns are Discontinuous", *Journal of Financial Economics*, 3, pp. 1235-144.
- Nandram, B. and Chen M. H. (1996) "Accelerating Gibbs Sampler Convergence in the Generalized Linear Models ", *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 54, pp 129-144.
- Priestley, M. B. (1981), "Spectral Analysis and Time Series", London: Academic Press.
- Shephard, N. and M. K. Pitt (1997), "Likelihood Analysis of Non-Gaussian Measurement Time Series", *Biometrika*, 84, 3, pp. 653-667.
- Stephans, D. A. (1994) "Bayesian Retrospective Multiple Change-point Identification", *Applied Statistics*, 43, pp. 159-178.
- Wang, J. and E. Zivot (2000) "A Bayesian Time Series Model of Multiple Structural Change in Level, Trend, and Variance", *Journal of Business & Economic Statistics*, vol. 18, No. 3, pp. 374-386.

表1. 基本統計量

	金利		
	仮想データ	レベル	変化率
平均	4.225	1.552	-0.011
標準偏差	2.537	0.342	0.076
ADF	4.600	0.297	27.799

表2. 推定結果(シミュレーションデータ)

	事後平均	標準誤差	95%下限	95%上限	真の値	CD
定数項(Y)	2.685	0.842	1.028	4.121	3.000	0.906
定数項(V)	-1.774	0.159	-2.433	-1.243	-1.960	-0.985
分散(W)	1.702	1.084	0.962	2.913	1.000	-0.326
分散(S)	5.159	2.313	1.368	18.405	4.000	-0.017
閾値	-3.635	0.279	-4.591	-2.818	-3.920	-0.239

表3. 推定結果(金利データ)

	事後平均	標準誤差	95%下限	95%上限	CD
定数項(Y)	-0.055	0.262	-0.908	0.605	-0.698
定数項(V)	-1.994	0.181	-2.977	-1.149	-0.322
分散(W)	0.048	0.063	0.005	0.336	0.678
分散(S)	0.025	0.033	0.004	0.154	0.468
閾値	-3.963	0.273	-5.392	-2.679	-0.081

Fig 1. シミュレーションデータ

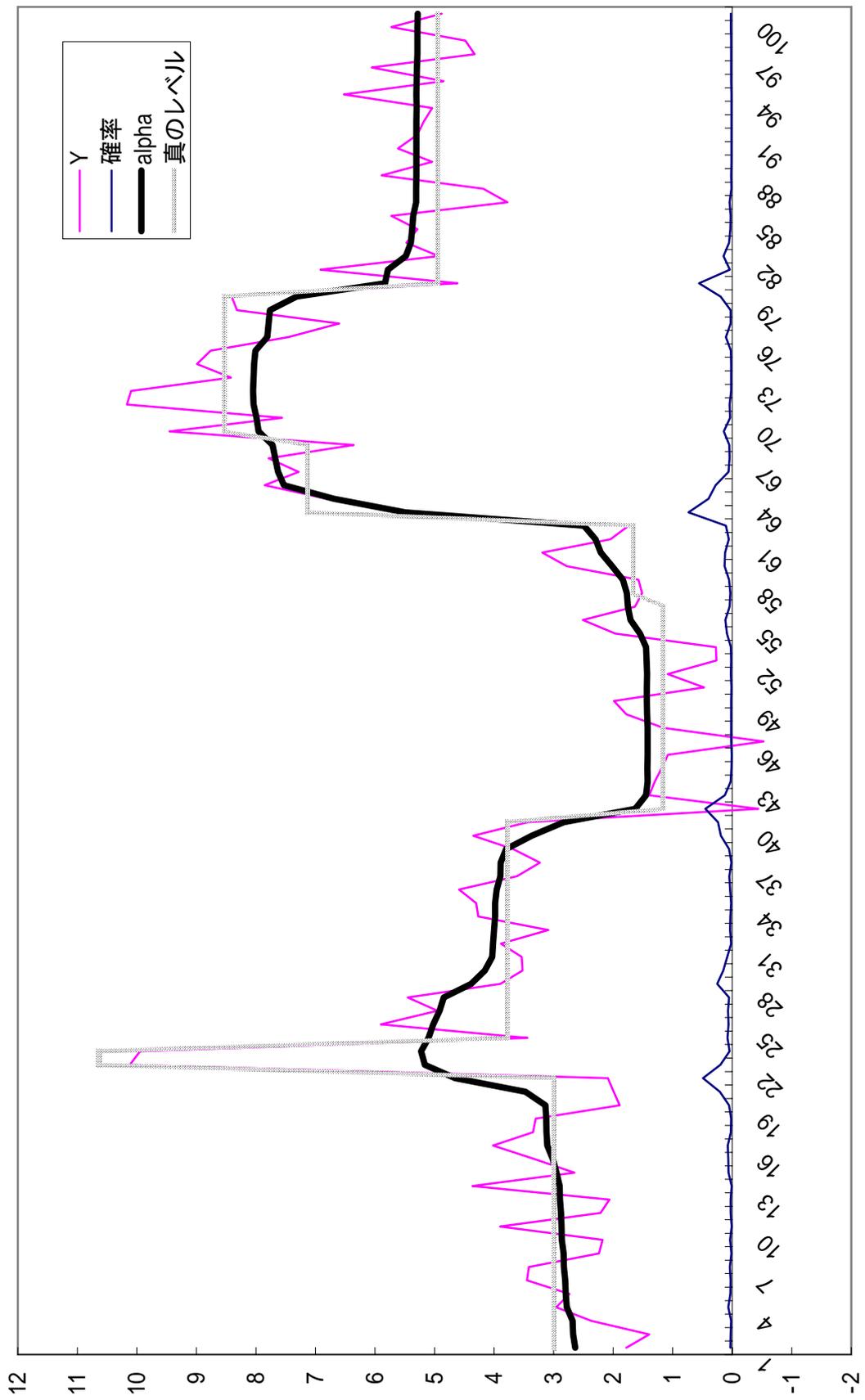


Fig. 2
Posterior Distributions

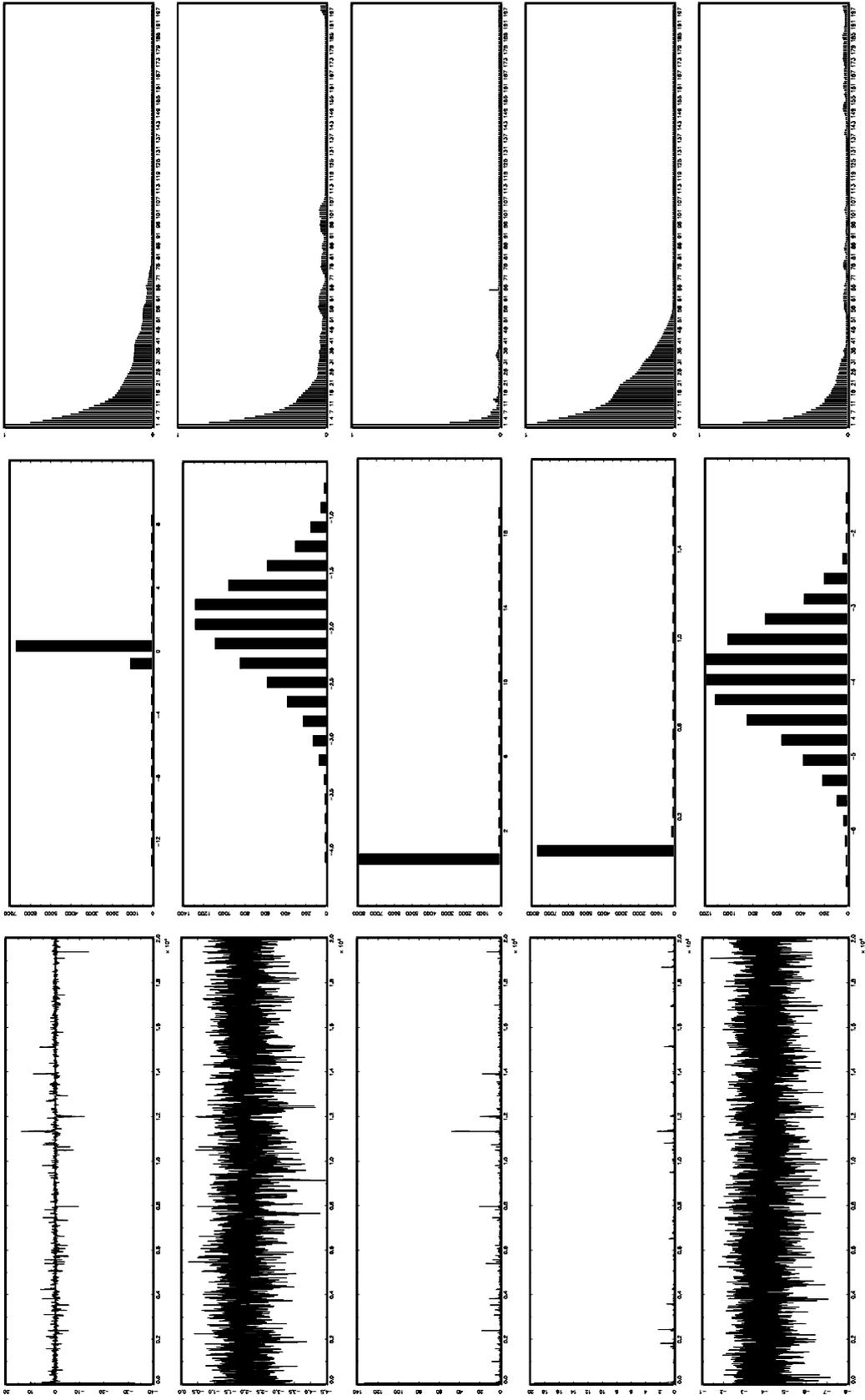


Fig 3. 金利

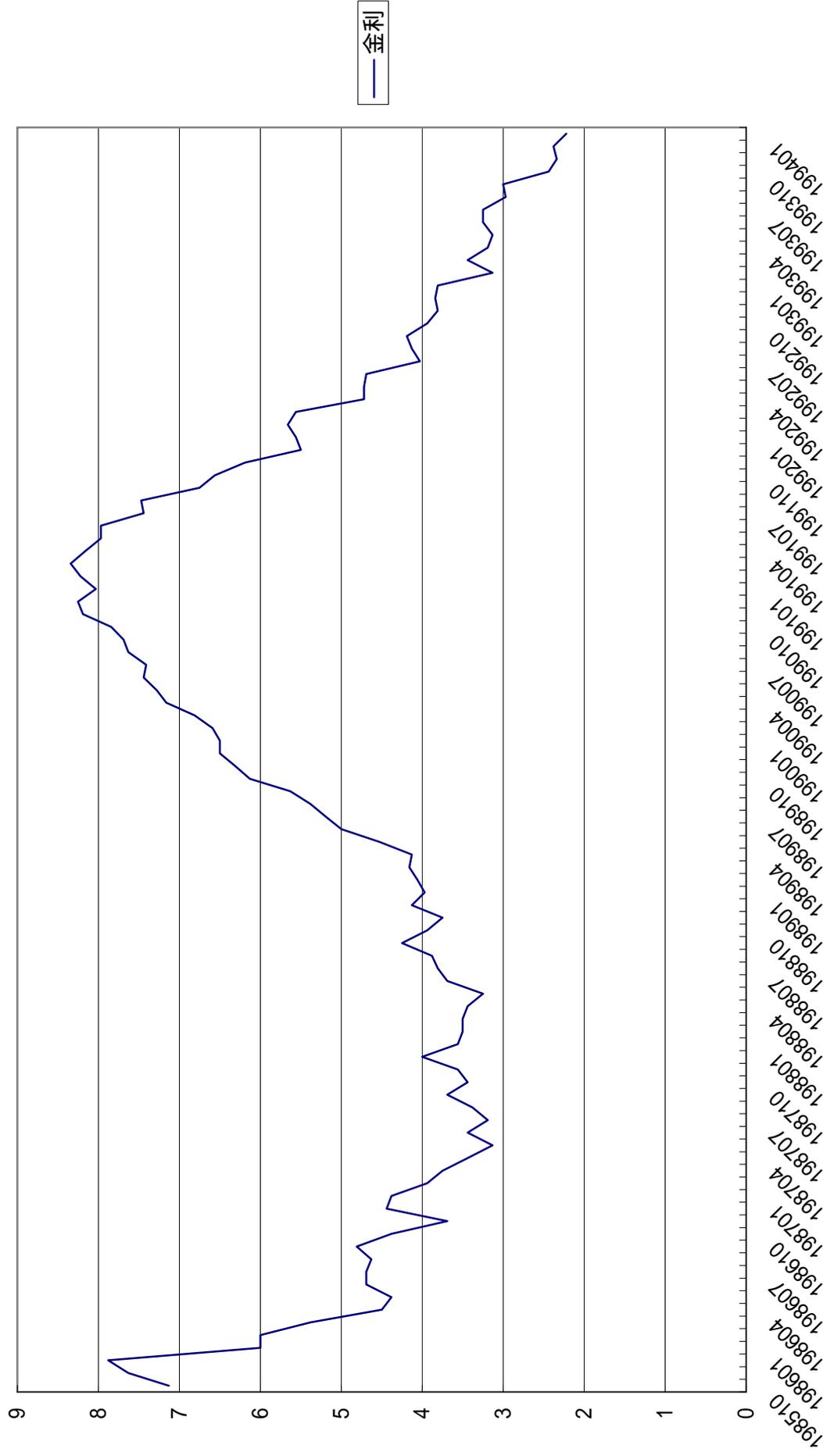


Fig 4. 金利の変化率

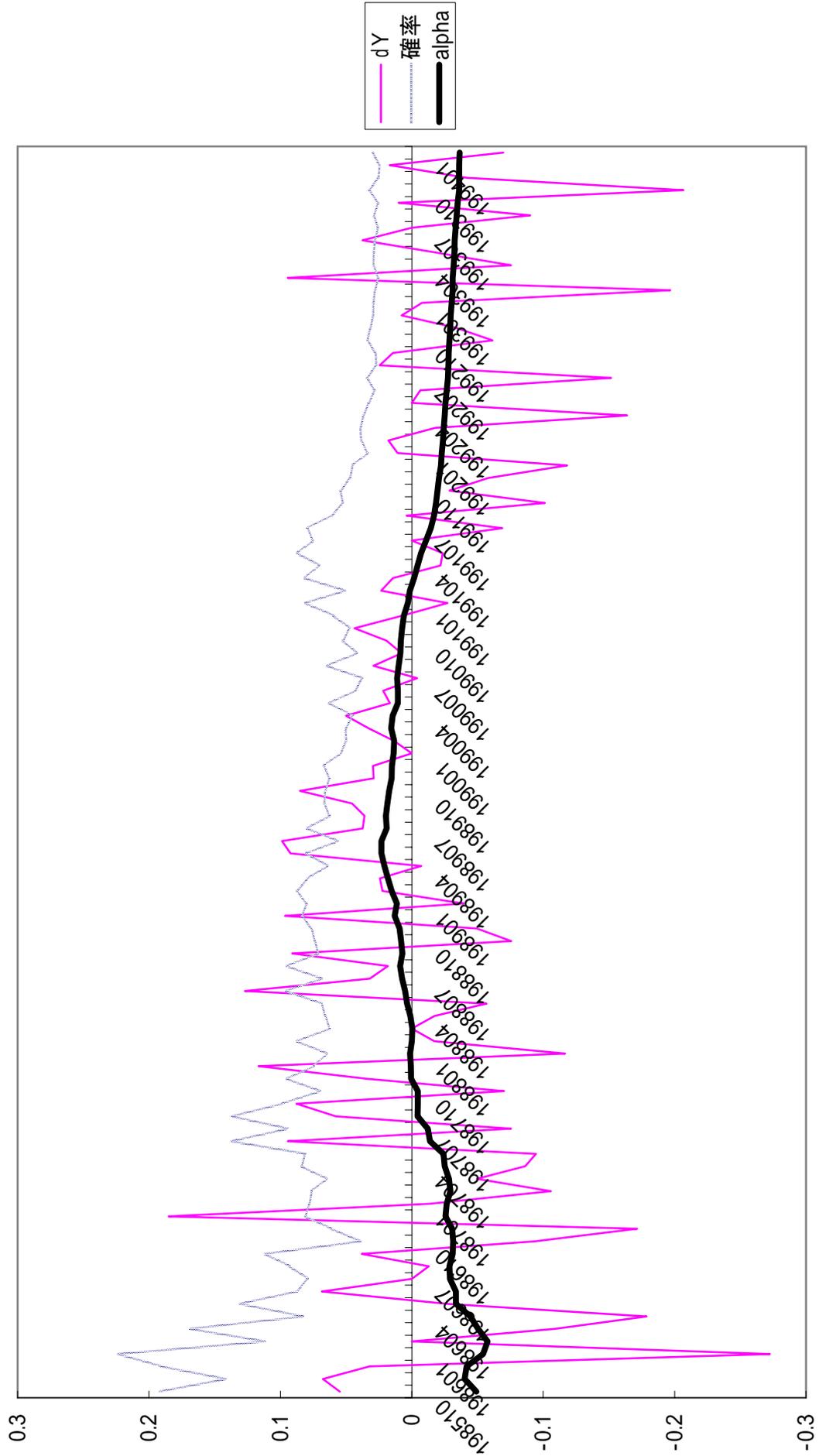


Fig. 5
Posterior Distributions

