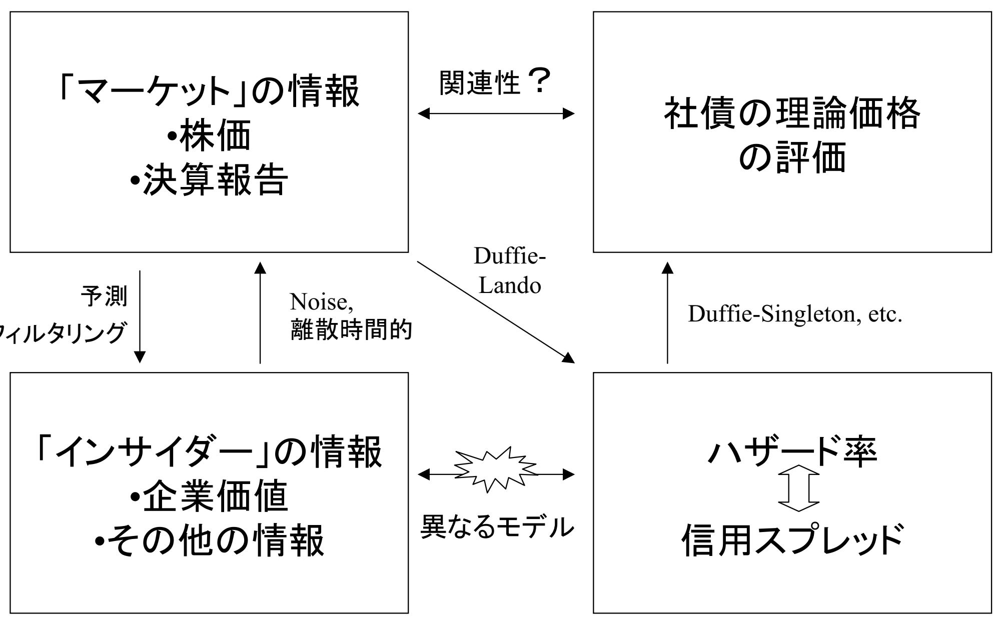
デフォルトリスクに関する
フィルタリングモデル

MTEC 研究員　中川 秀敏*

２００２年１月

1　発表テーマのイメージ

今回の発表テーマのイメージは下の図の通りである。



*105-0014 東京都港区芝 2-5-6 芝菱信ビル 6 階 エムティービー インベストメント テクノロジー研究所
TEL:03-3457-1977　FAX:03-3457-0910　E-mail: nakagawa@mtec-institute.co.jp

2 予備知識

今回は、デフォルトリスクの数理モデルに関する報告を行う。デフォルトという事象を数学的に扱うための基本的なアイデアは、デフォルトの発生する時刻をあるランダムな時刻、すなわち非負値の確率変数によって記述しようというものである。デフォルトの有無によってペイオフが変わるような仮想的な金融商品（デフォルトの危険性のある割引債と考えられよう）を例に具体的にどのような点が問題となるかを考えてみる。

その商品は次のような性格をもつとする：

- もし、満期までにデフォルトしなければ、満期に契約時に定めた元本を受け取る。
- もし、満期前にデフォルトしたならば、デフォルト時点で契約に従っていくらかの金額（元本より一般に少ない）を回収する。
- 満期もしくはデフォルト時以外にクーポン等の支払いはない[1]。

このような金融商品は、デフォルトの可能性があることによってデフォルトの可能性がない場合と比較して、その価値が一般に低くなるために、デフォルト・リスクのある金融商品ということになる。

このような商品の価格付けを、数理ファイナンスにおける基本的概念である、“NO ARBITRAGE（無裁定）” の枠組みで考えるためには、次のような数学的設定を与えるのがごく自然であろう。

$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$ をフィルトレーション付の確率空間とする。

デフォルトが起きる時刻を、非負値確率変数 τ で表す。特に $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-停止時刻であるとみなしておく。すなわち、デフォルトしたかどうかは、得られる情報の一部であると仮定する。

元本を C、またデフォルト時に回収できる額を $L(\tau)$ とする。（これらは、定数としても確率変数としてもよい。）

以上の設定のもとで、考えている金融商品の時点 t での価格 $p(t)$ は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} p(t) &= 1_{\{\tau>t\}} E^Q[\exp\Big(-\int_t^\tau r(s)ds\Big) L(\tau) 1_{\{\tau\leq T\}} \\ &\quad + \exp\Big(-\int_t^T r(s)ds\Big) C 1_{\{\tau>T\}} | \mathcal{F}_t], \end{aligned}$$

ただし、r はある短期金利過程、Q はある同値マルチンゲール（リスク中立）確率測度と呼ばれるものとする[2]。

[1]実際にこのような回収方法はとられていないようだが、説明の便宜上このように仮定している。

[2]一般にデフォルトという事象のヘッジは不可能であり、完備性が成り立たず同値マルチンゲール測度が一意に定まらないので「価格」といってもその扱いには注意が必要である。

この例から分かるように、一般に、τ の同値マルチンゲール測度の下での（条件付き）確率分布に関する知識を得ることが、デフォルトリスクに関連する様々な計算を具体的に進めていく上で不可欠になってくる。それは言うまでもなく、デフォルト時刻を示す確率変数 τ をどのように特徴付けするかに強く依存する。

詳細については後述するが、その特徴付けには大きく分けて２つの考え方がある。一つは「企業の資産価値」を確率過程でモデル化し、その資産価値がある一定水準に落ち込んだ時点で、デフォルトが発生したと考えるものである。これは、企業のデフォルトはその財務状態によって規定されるという立場からのアプローチであり、Structural アプローチなどと呼ばれることがある。

もう一つのアプローチは、いわばデフォルト時刻の分布を規定する要因を外生的に与えるという立場からのものである。その中でも特に、しばしば「ハザード率」と呼ばれる指標に注目し、それによってデフォルト時刻の分布を特徴づける考え方がよく用いられる。このようなアプローチは、Reduced-form あるいは Intensity-based アプローチなどと呼ばれる[3]。

2.1 Structural アプローチ

Structural アプローチは、もともと Merton が、債務の返済時点において、資本が負債を下回っている状況をデフォルトと規定したのが始まりと言われている。今日では、そのアイデアを抽象化し、「企業価値」（厳密に何を指しているかはとりあえず問題にしないことにする）をある確率過程で記述し、それが前もって定められた水準を下回った時点をデフォルトとする立場を総じて、structural アプローチと呼ぶことが多い。簡単なモデルを用いてもう少し詳しく説明しよう。

「企業価値」を表す確率過程 V_t が、

$$dV_t = \mu(V_t, t)dt + \sigma(V_t, t)dB_t \tag{1}$$

という確率微分方程式を満たしているとする。（厳密な式の意味づけは省略する）初期値については、$V_0 > 0$ とする。

このとき、デフォルト時刻を V_t が初めて０以下に陥った時点、すなわち

$$\tau = \inf\{t > 0 : V_t \le 0\} \tag{2}$$

として定める。デフォルトの水準は、０でなくてもよいし、一定でなくてもかまわないが、ここでは簡単のため単純に０としている。いずれにしても τ の性質は、「企業価値」という

[3]スプレッドの期間構造に注目したり、格付け推移行列と関連づけるなどしてハザード率を推定するということが試みられている。

いわばその企業の財務状態から構造的に決まってくるという解釈を許容しており、考え方としてはごく自然とも言える。

この場合、τ の分布を知るという問題は、数学的には確率過程のある領域への初到達時刻の分布の問題であり、その計算には確率論で良く知られた議論を適用することが可能となる[4]。

しかしながら、デフォルトという事象は、どちらかと言えば、突然起こるというのが一般的な実感としてある。上記の例のような考え方では、「企業価値」を追っていくことで、デフォルトの発生がその直前にはある程度予測できてしまうという感じになっている。このことは、デフォルト時刻が、「企業価値」から生成されるフィルトレーションに関して可予測 (predictable) な停止時刻になっているという事に他ならない。そうした意味で、突発的という感じをモデルに織り込みたい場合にはあまり適しているとは言えない[5]。また、「企業価値」が常に観測できることを暗に前提としており、いわゆるインサイダーの立場でない限りそのようなことはまず不可能であるし、多くの場合公表されたものにも何らかのノイズが加わっていると考えられることから、このモデルをそのまま（すなわち完全情報の前提の下で）実務的に取り扱う際には問題点は少なくない。

2.2 Reduced-form(Intensity-based) アプローチ

一方で、Reduced-form アプローチは、何らかの意味で、τ の分布を規定する要因を外的に、すなわち対象となる企業の財務状況などとは無関係に、与えてしまうという立場である。特に、「ハザード率」などと呼ばれる、本質的には、Poisson 過程の「強度」に相当する指標によって特徴づけすることから、Intensity-Based アプローチなどとも呼ばれる。

この場合、観測される事象はデフォルトが起きたか起きないかの 2 つだけであり、デフォルトの可能性の高低に関する情報は得ていても、直接デフォルトの発生を示唆する要因を観測できるわけではないので、その意味で、デフォルト事象は、突発的であるという感覚に逆らわないモデル設定の仕方と見なせる。

以下で簡単な数学的設定を述べる。デフォルト時刻 τ を、あるフィルトレーション $(\mathcal{H}_t)$ に関する停止時刻とする。これに付随して、$N_t = 1_{\{\tau \le t\}}$ というデフォルトの発生をカウントする確率過程を定義しておく。

また、ハザード率過程 $h(t)$ を、非負値の $(\mathcal{H}_t)$-発展的可測過程で、

$$N_t - \int_0^t (1 - N_s) h(s) ds \tag{3}$$

が、$(\mathcal{H}_t)$-マルチンゲールになるものとして定義する。すなわち、ハザード率過程は、N_t を

[4] time change などでブラウン運動の場合に帰着できるときもあるが、一般にはある境界条件付の Kolmogorov の後進方程式を解く問題になる。

[5]「企業価値」がジャンプを許す確率過程に従う場合の研究も行われている。

劣マルチンゲールとみなしたときに、Doob-Meyer 分解によって得られる可予測な非減少過程のルベーグ測度に関する（デフォルト時点まで有意な）密度として得られるものとする。上のようにハザード率過程を定義することは先にデフォルト時刻ありきという感じがするし、なおかつ直観的にはわかりにくいと思うが、ある適当な条件の下で、次のような関係式が選られることが知られている。

$$P(\tau > t|\mathcal{H}_s) = 1_{\{\tau>s\}}E[\exp\Big(-\int_s^t h(u)du\Big)|\mathcal{H}_s], \quad s < t. \tag{4}$$

この結果から、$h(t)$ と τ は本質的に等価であると見なすことができよう。実際にはこの関係に注目して、先に $h(t)$ の期間構造を与え、それによってデフォルト時刻 τ の分布を特徴づけ、(3) 式も満足していることを確認するというのが自然な考え方であろう。ただし、上で述べたハザード率過程の定義で示されている条件と関係式 (4) が必ずしも同値ではないので、モデルの運用には注意が必要である[6]。

実務の観点から、reduced-form アプローチを考えてみると、例えば Duffie-Singleton [3] のモデルからは、ハザード率過程 $h(t)$ が、デフォルトリスクのない債券（例えば国債）とデフォルトリスクのある債券（例えば社債）の利回りの差、いわゆるクレジット・スプレッドと密接に関係しているという結果が得られる[7]。

すなわち、無リスク短期金利過程を $r(t)$、回収率を δ とすれば、

$$P(t,T) = E^Q\Big[\exp\big(-\int_t^T \{r(u) + (1-\delta)h(u)\}du\big)|\mathcal{H}_t\Big] \tag{5}$$

となる。$E^Q[\cdot]$ は金利マーケットに対するリスク中立確率 Q の下での期待値を表す。

このことは、債券市場で得られるデータから、ハザード率に関係するパラメータを推定し得ることを示唆しており、デフォルトリスクを扱う実務サイドに比較的受け入れられやすい枠組みになっている。例えばハザード率過程を金利の期間構造に模してモデル化し、そのパラメータを推定するという研究も試みられている。([1] など) もちろんヒストリカルなデータから算定したような（元々の確率測度下での）デフォルト時刻の分布と、パラメータ推定がなされた（リスク中立測度下での）ハザード率過程とを単純に突き合わせることは問題であるし、Duffie-Singleton のような関係式が成り立つためにはいろいろな条件が満足されなければならないことに常に留意しなければならない。

[6] 特に確率測度を変更する場合には成り立たないおそれがある。([5])

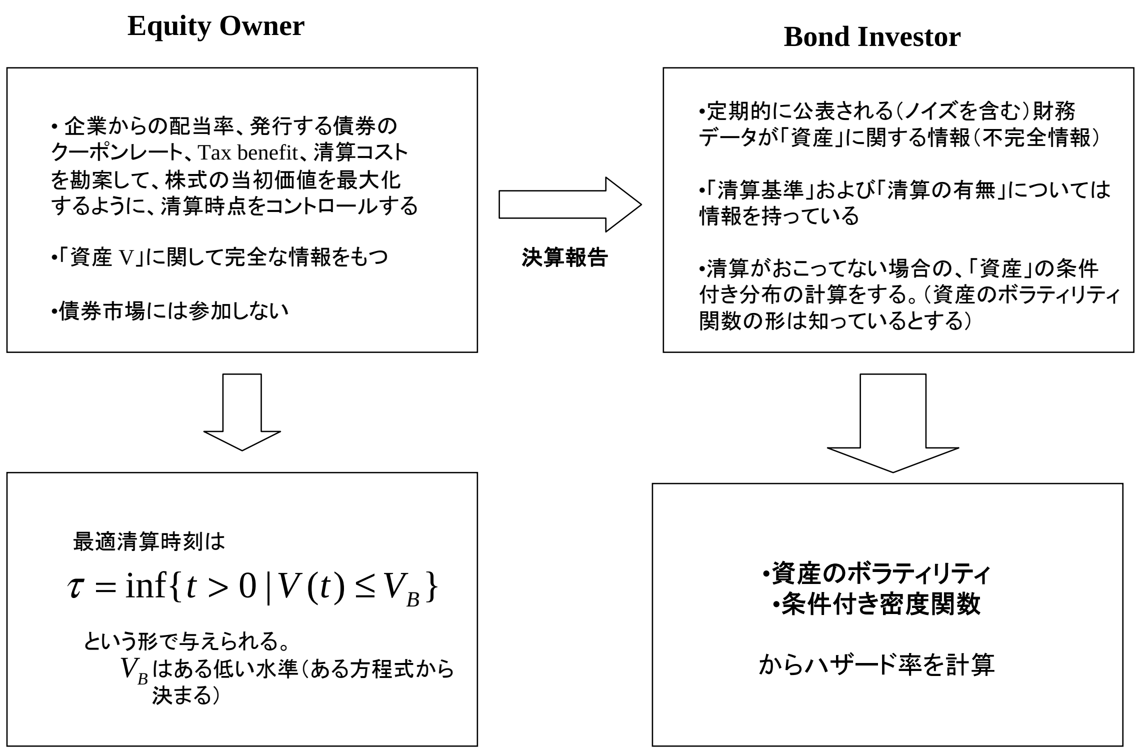
[7] 大ざっぱに言って、
「スプレッド」=「ハザード率」×「デフォルト直前の債券価格に対する非回収率」
という関係が成り立つ。

3　Duffie-Lando の論文 [2] のサーベイ

前節で触れたデフォルトリスクについての 2 つのアプローチを念頭に置いて、数学的にも興味深いモデルとして Duffie-Lando [2] が提唱したモデルを見ていく。彼らのモデルを要約すれば、Structural アプローチの枠組みで、「企業価値」を部分的になおかつノイズが加わった形で観測されるとした「不完全情報」の状況を考えることで、reduced-form アプローチにおけるハザード 率過程と「企業価値」のパラメータとを関係づける事ができることを示したものと言える。

彼らの論文における設定を要約すれば次のようになるだろう。

Duffie-Lando (Leland - Toft) のモデル



「企業資産」および「負債（consol bond）」からなる資本構造を具体的にモデル化し、企業について「完全な情報」を得ることのできる株主（未公開株を想定している）が、tax benefit のために、清算時までクーポンを払い続ける債券を発行する。また、株主は株式価値を最大化するように「清算時点」を決めることができる。（その他のパラメータをコントロールす

ることはできない。）このとき、その「清算時点」は「企業資産」が（ある方程式から決まる）十分に低い水準に初めて達した時点として与えられる。

一方この企業の社債への投資家は、情報として与えられるのは、決められた時点で公表される財務状況と清算の有無だけと仮定されている。ただし、株主がどのような条件で企業を清算するかについては知っているとしている。社債の投資家は、「企業資産」を完全に観測することはできないので、部分的に与えられる「不完全な情報」をもとにその分布を推測し、その債券の信用度について何らかの知識を得ることになる。

「企業資産」や「負債」などについての詳しいモデルについてはここでは省略し、最も興味のある「企業資産」のパラメータ（彼らの論文では、幾何ブラウン運動の形でモデル化されているが、以降では一般的に拡散過程で考えることにする）と社債投資家サイドが評価するハザード率との関係の部分についてのみ数学モデルで簡単な説明を加えることにする。「清算時点」は「デフォルト時点」と言い換えることにする。

$(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ をフィルトレーションとする。これを完全な情報、すなわち株主の情報と見なすことにする。また、$(\mathcal{H}_t)$ を $(\mathcal{F}_t)$ の（真の）部分フィルトレーションとし、これを社債投資家の持つ情報と考える。

ここで「企業資産」V を (1) で与える。V は $(\mathcal{H}_t)$-適合で**ない**とする。また簡単のため、デフォルト時点を (2) で与える（すなわち、デフォルト水準を 0 とする）。τ は、$(\mathcal{H}_t)$-停止時刻とする。

Duffie-Lando はこのような設定において、

$$c(t) = \lim_{x\downarrow 0} \frac{1}{x} \frac{P(V_t \in dx|\mathcal{H}_t)}{dx} \tag{6}$$

が存在するなら、さらなる技術的条件の下で、(3) 式で定義された $(\mathcal{H}_t)$-ハザード率過程 $h(t)$ と (1) を満たす V のボラティリティー関数 σ と $(\mathcal{H}_t)$-条件付確率密度の微分係数 (6) との間に

$$h(t) = \frac{1}{2}\sigma(0,t)^2 c(t) \quad \text{on } \{\tau > t\}$$

という関係が成り立つことを示した。

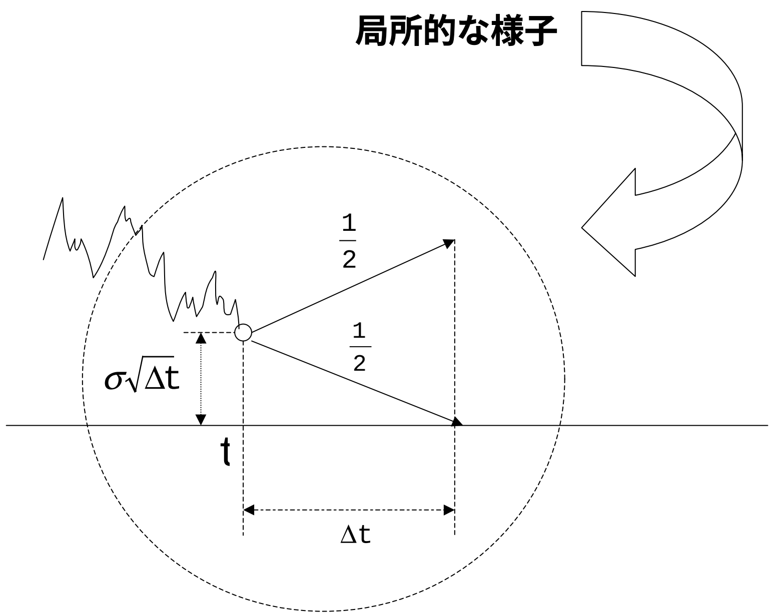
直感的には、$\{\tau > t\}$ という状況において、

$$P(t < \tau \leq t + \Delta t|\mathcal{H}_t) = h(t)\Delta t$$

という関係が（もちろん無条件ではないが）成り立つことに注意。

左辺は、時点 t ではデフォルトが起きていないが、微小時間 $(t, t+\Delta t]$ の間にデフォルトするという事象の $\mathcal{H}_t$ を与えたときの条件つき確率である。このようなことが起こるために

は、時点 t の段階で V_t がほとんど 0 に近い位置にあると見込んで、なおかつ次の瞬間に 0 の方にシフトすることが必要となる。$c(t)$ は 0 方向へのシフトする際の変化率と解釈される。上方にシフトするかもしれないのでその確率はほぼ半々ということで $\dfrac{1}{2}$ が現れ、σ はもともと摂動の大きさを表すパラメータであることを考慮すると上の関係は自然なものと捉えられる。



上で述べたことを式で粗く展開すると次のようになる。(σ は定数とする。)

$$
\begin{aligned}
h(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} P(\tau \le t + \Delta t | \mathcal{H}_t) \\
&\approx \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\frac{1}{2}\{P(V_t \le \sigma\sqrt{\Delta t}|\mathcal{H}_t) - P(V_t \le 0|\mathcal{H}_t)\}}{\Delta t} \\
&\approx \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{2} \frac{P(V_t = \sigma\sqrt{\Delta t}|\mathcal{H}_t)\sigma\sqrt{\Delta t}}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{2} \frac{P(V_t = \sigma\sqrt{\Delta t}|\mathcal{H}_t)\sigma^2}{\sigma\sqrt{\Delta t}} \\
&= \frac{1}{2}\sigma^2 \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(V_t = \sigma\sqrt{\Delta t}|\mathcal{H}_t)}{\sigma\sqrt{\Delta t}} \\
&= \frac{1}{2}\sigma^2 c(t)
\end{aligned}
$$

彼らの研究は、デフォルトリスクのモデル化において、どのようなフィルトレーションに

ついて考えるかによって、様相が大きく変わりうることということを示唆しているとも読みとることができる。

4　デフォルトリスクに関するフィルタリングモデル[8]

以降では、Duffie-Lando の論文で与えられているものとは異なる Structural アプローチを前提としたフィルタリングモデル、すなわち、企業価値とそれに影響を与える企業の内生的変数を観測されない「系」とし、それらにノイズの加わった「観測」から生成されるフィルトレーションを投資家の得られる情報とするモデル（[5] のフィルタリングモデルの拡張）を紹介し、ハザード率過程の特徴付け、およびハザード率過程とデフォルト時刻の分布についての関係などについて言及する。結果的には、Duffie-Lando 同じものを得ることになっている。（ただし計算のアプローチが異なっており、数学的に興味深い結果を得ることができた。）

それぞれの変数についての意味は深く考えないことにする[9]。

$T>0$ をある定数、$(\Omega,\mathcal{B},(\mathcal{B}_t)_{t\in[0,T]},P)$ をある完備な確率空間とする。また、$(B_t),(B'_t),(W_t)$ をそれぞれ独立な $1,N_1,N_2$-次元 $(\mathcal{B}_t)_{t\in[0,T]}$-ブラウン運動とする。

次で与えられる「標準化された」フィルタリングモデルを考える。

１次元確率過程 $(X_t)_{t\in[0,T]}$、N_1-次元確率過程 $(Z_t)_{t\in[0,T]}$ を次の確率微分方程式の解とする[10]。

$$\begin{aligned} dX_t &= dB_t+\mu(t,X_t,Z_t)dt, \qquad X_0=x_0>0,\\ dZ_t &= \sigma_0(t,X_t,Z_t)dB'_t+b_0(t,X_t,Z_t)dt, \qquad Z_0=z_0\in\mathbf{R}^{N_1}, \end{aligned}$$

μ,σ_0,b_0 は有界で連続な関数（μ には適当な微分可能性も仮定する）とする。

ここで、非負値確率過程（ランダム時刻）τ を

$$\tau=\inf\{t\in[0,T]|X_t=0\}$$

と定義する。（ただし、$\inf_{t\in[0,T]} X_t(\omega)>0$ のときは、$\tau(\omega)=+\infty$ とおくことにする。）

[8]本節の内容は、筆者が東京大学大学院数理科学研究科の博士論文として提出したものの一部であり、詳細は [6] を参照のこと。同研究科の楠岡成雄教授には、本研究を進める中で数多くの有益な助言を頂いた。ここで改めて謝意を表したい。

[9]というか、筆者自身 explanatory な例を考えるに至っていない。

[10]より一般的な設定で考えることは可能であるが、適当な座標変換によってここで仮定している形に帰着できる。

この τ をデフォルト時刻と呼ぶことにする。

N_2-次元確率過程 $(Y_t)_{t\in[0,T]}$ を次の確率微分方程式の解とする。

$$\boxed{dY_t = \sigma_1(t, Y_t)dW_t + b_1(t, X_{t\wedge\tau}, Z_{t\wedge\tau}, Y_t)dt, \qquad Y_0 = y_0 \in \mathbf{R}^{N_2},}$$

ただし、σ_1, b_1 はやはり有界で連続な関数とする。また、特に、$a_1 \equiv \sigma_1\sigma_1^{\mathrm{T}}$ は、$a_1 \geq \varepsilon I_{N_2}$（$\varepsilon > 0$ はある定数、I_{N_2} は N_2-次元単位行列）を満たすと仮定する。

また、フィルトレーション $(\mathcal{G}_t^Y)$ および $(\mathcal{F}_t)$ を

$$\mathcal{G}_t^Y = \sigma\{Y_s, s \leq t\}, \qquad \mathcal{F}_t = \mathcal{G}_t^Y \vee \sigma\{\tau \wedge t\}$$

と定義する。

$N_t = 1_{\{\tau\leq t\}}$ とする。このとき、確率測度 P の下で次の Doob-Meyer 分解 が成り立つ。$N_t = M_t + A_t$: M_t は $(P, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]})$-マルチンゲール、$A_t$ は $A_0 = 0$ を満たす非減少な $(\mathcal{F}_t)$-可予測過程。

以上の設定の下で次の問題を考える。

「$((\mathcal{G}_t^Y)_{t\in[0,T]})$-発展的可測過程 $h(t)$ で

$$A_t = \int_0^t (1 - N_s)h(s)ds$$

を満たすものは存在するか、また存在するとき、$h(t)$ はどのような表現を持つか。」(この $h(t)$ を「ハザード 率過程」と呼ぶことにする。）

上の問題に対しては、次のように取り組んでいく。まず確率測度を P から、X, Z と Y を独立にし、さらに X をブラウン運動とするような確率測度 $\tilde{P}$ に変更する。次に、

$$\rho_t = \tilde{E}[\frac{dP}{d\tilde{P}}|\mathcal{F}_t]$$

を考え、この (ρ_t) が満たす確率積分方程式の表現を求める。

以下で、$\lambda(s) = -\tilde{P}(\tau > t)\dfrac{d}{dt}\tilde{P}(\tau > t)$ とし、

$$\tilde{M}_t = N_t - \int_0^t (1 - N_s)\lambda(s)ds$$

とするとき、$(\tilde{M}_t)$ は、$(\tilde{P}, \mathcal{F}_t)$-マルチンゲールになることに注意。

定理 4.1. ρ_t は次の確率積分方程式の解である。

$$\rho_t = 1 + \int_0^t \rho_{s-}(\gamma(s)^{\mathrm{T}} d\tilde{W}_s + \kappa(s) d\tilde{M}_s) \tag{7}$$

ただし、$\gamma(s), \kappa(s)$ は、ある $(\mathcal{F}_t)$-可予測過程。（本文では、これらが具体的に与えられているが、ここでは省略する。）また、$\tilde{W}$ は、$(\tilde{P}, \mathcal{G}_t^Y)$-ブラウン運動。

最終的には、Kusuoka [5] の結果とあわせて、次の主定理を得る。

定理 4.2.

$$h(t) = \frac{\hat{H}(t;Y)}{\hat{K}(t;Y)} \lambda(t),$$

とする（$\hat{H}(t;Y), \hat{K}(t;Y)$ の具体的な表現は省略）とき、$h(t)$ は $(\mathcal{G}_t^Y)_{t\in[0,T]}$-発展的可測過程であり、

$$N_t - \int_0^t (1 - N_s) h(s) ds$$

は $((\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}, P)$-マルチンゲール、すなわち、$h(t)$ は、確率測度 P の下での $(\mathcal{G}_t^Y)$-ハザード率過程である。

上で得られた関係式は、不完全情報の下でのデフォルトリスクモデルについて前節で見た Duffie-Lando [2] の主張と結果的に同じものになっている。

また、実際に P の下でのデフォルト時刻 τ の $(\mathcal{F}_t)$-条件付き分布と、ハザード率 $h(t)$ との関係についても考察した。

$\bar{\gamma}(u;Y)$ を $(1 - N_{u-})\gamma(u) = (1 - N_{u-})\bar{\gamma}(u;Y)$ を満たす $(\mathcal{G}_t^Y)$-発展的可測過程とし、$c(u;Y)$ を

$$\tilde{E}[\frac{dP}{d\tilde{P}}|\mathcal{G}_t^Y] = \exp\Big(\int_0^t c(u;Y)^{\mathrm{T}} d\tilde{W}_u - \frac{1}{2}\int_0^t |c(u;Y)|^2 du\Big)$$

を満たす $(\mathcal{G}_t^Y)$-発展的可測過程とする。

また、(W_t^P) を

$$W_t^P = \tilde{W}_t - \int_0^t c(u;Y) du$$

で定めるとき、$(P, (\mathcal{G}_t^Y))$-ブラウン運動となる。

このとき、次の関係が成り立つことが示される。

命題 4.3. $0 \le t < s \le T$ とする。また、Λ を有界な $\mathcal{G}_s^Y$-可測確率変数とする。このとき、

$$
\begin{aligned}
&E[\Lambda(1-N_s)|\mathcal{F}_t] \\
&\quad = (1-N_t)E[\Lambda \exp\Big(-\int_t^s h(u)du\Big) \\
&\qquad \times \exp\Big(\int_t^s \{\bar{\gamma}(u;Y)-c(u;Y)\}^{\mathrm{T}} dW_u^P - \frac{1}{2}\int_0^t |\bar{\gamma}(u;Y)-c(u;Y)|^2 du\Big)|\mathcal{G}_t^Y].
\end{aligned}
$$

上の結果をファイナンスの視点で見直すと次のような解釈が可能であろう。r_t を $(\mathcal{G}_t^Y)$-適合な非負値過程で表される無リスクの短期金利過程とする。P はリスク中立な測度とする。満期において $1_{\{\tau>T\}}$ 支払いのある（すなわち、満期にデフォルトしてなければ１，していれば０）証券の時点 t での価格 $P(t,T)$ は次のように表現される。

$$
\boxed{
\begin{aligned}
&P(t,T) \\
&\quad = (1-N_t)E[\exp\Big(-\int_t^T \{r_u + h(u)\}du\Big) \\
&\qquad \times \exp\Big(\int_t^T \{\bar{\gamma}(u;Y)-c(u;Y)\}^{\mathrm{T}} dW_u^P - \frac{1}{2}\int_t^T |\bar{\gamma}(u;Y)-c(u;Y)|^2 du\Big)|\mathcal{G}_t^Y].
\end{aligned}
}
$$

粗く言えば、この場合クレジット・スプレッドはハザード率過程に、２つのフィルトレーション　$(\mathcal{F}_t)$ と $(\mathcal{G}_t^Y)$ の微妙な差から来る何らかの摂動が加わったものであるとみなすことができる。

5　フィルタリングモデルについての今後の課題・問題点

数学的な問題意識としては

- デフォルトの直接要因である X が多次元の場合も同様の式が成り立つか？ ――＞ 肯定的解決が見込まれる。
- ハザード率過程 $h(t)$ の期間構造としてどのようなものがサポートされるか？（現在よく利用されている金利モデルのようなものを導出することができるか？）

という点が挙げられるかと思う。

一方で実務的観点からは

- そもそも X, Z および Y とはどのようなファクターやデータに対応するのか？(Y としては株価および連続的に観測されるマクロ変数？　X は「企業価値」で、Z は「企業価値」に影響を及ぼす内部要因か？ノイズの加わり方など見ながら考慮すべき)

- 仮にそれぞれの変数に現実の何某かを対応させたときに、ハザード率過程は実際どのような挙動をするものとして得られるか？(シミュレーションするのはおもしろいかもしれない。どのようなモデルで計算するかは慎重に考えなければ全くナンセンスなものになりうるが $\cdots$)

- こういうアプローチはすでに知られているのか？　また実務の方は興味を持っているのか（持ちうるのか）？

などが挙げられるだろう。

参考文献

[1] Aonuma, K., Nakagawa, H.: Valuation of Credit Default Swap and Parameter Estimation for Vasicek-type Hazard Rate Model. *Submitted*(1998).

[2] Duffie, D. and Lando, D.: Term Structure of Credit Spreads with Incomplete Accounting Information," *Econometrica*, **69**, 633-664 (2001).

[3] Duffie, D., Singleton, K.: Modelling Term Structures of Defaultable Bonds. Reviews of Financial Studies **12**, 687-720 (1999).

[4] Jeanblanc, M., Rutkowski, M.: Modelling of Default Risk: An Overview. Working paper (1999)

[5] Kusuoka, S.: A Remark on default risk models Models. Adv. Math. Econ. **1**, 69-82 (1999) [11]

[6] Nakagawa, H.: A Filtering Model on Default Risk. J. Math. Sci. Univ. Tokyo. **8**, 107-142(2001)

[7] Song, S.:A remark on a result of Duffie and Lando. Working paper (1998)

[11] 慶応大学経済学部紀要に東大数理の河備浩司氏による同論文の和訳がある。