取引コストのある市場における ヘッジングと効用最大化問題について

神 薗 健 次

〒 850-8506 長崎市片淵 4-2-1

長崎大学経済学部

k-kamiz@net.nagasaki-u.ac.jp

平成 14 年 5 月 8 日

1　はじめに

本論文は、取引コストの存在する多資産市場におけるヘッジング問題と効用最大化問題に関する最近の動向について、特にマルチンゲール・凸解析アプローチに焦点を絞って解説したサーベイ論文である。中心となる原論文は、Kabanov-Last[20]、Kamizono[21, 22] である。定理や命題の証明は、文中で特に出典を指定したもの以外はこれらの論文中で見つかるから、本論文では証明を与えていない。Kabanov-Last[20] は、優ヘッジング (super-hedging) に関する論文であり、Kamizono[21] は部分ヘッジングと効用最大化に関するものである。Kamizono[22] は、Kamizono[21] の効用最大化を取り扱った章を加筆・修正したものであり、特に凸解析手法の応用に関して述べた部分では、非完備市場における効用最大化問題を論じた Kramkov-Schachermayer[26] との比較が、より明解に述べられている。なお、本論文ではほとんど取り上げられていないが、資産価格過程がブラウン運動にドライブされる拡散過程である場合には、動的計画法・非線形偏微分方程式アプローチも有効であり、この方面でも研究が進んでいる (例えば、Shreve-Soner[32]、Bouchard-Touzi[3] など)。動的計画法・非線形偏微分方程式アプローチに関するサーベイとしては、Zariphopoulou[35] がある。

取引コストのある資産市場モデルに対するマルチンゲール・アプローチは、1 危険資産の場合に、Jouini-Kallal[18]、Kusuoka[27] などの離散時間モデルにその萌芽が見られ、Cvitanić-Karatzas[7] によって連続時間モデルへと拡張された。多資産市場への拡張は、Kabanov[19]、Kabanov-Last[20]、Deelstra-Pham-Touzi[11]、Kamizono[21, 22] と続くわけだが、その基本的な路線は、非完備市場におけるヘッジングと効用最大化の問題に関する理論 (例えば、Cvitanić-Karatzas[5, 6]、Delbaen-Schachermayer[12, 13]、Kramkov-Schachermayer[26] といった流れ) と並行した理論を構築するというものである。

本論文の構成は次の通りである。まず、第 2 節と第 3 節では、基礎となるモデルについて述べる。取引コストがある市場では、投資家の富みが正であるとか負であるとかいった性質は、ただ単に 1 変数の富過程 (wealth process) の符合によって表されるわけでなく、多変数のポートフォリオ保有額過程を用いて表現される。このとき鍵となるのが、第 3 節で導入する支払可能領域である。続く第 4 節では、Kabanov-Last[20] による優ヘッジング (super-hedging) 問題に関する結果を紹介する。先ほど、取引コストがある市場においては投資家の富の状態が多変数のポートフォリオ保有額過程で表現されると述べたが、このことに対応して、取引コストのない市場における状態価格過程に対応する確率過程は、取引コストがある場合には多変数過程である。そして、例えば Cvitanić-Karatzas[6] に述べらているような非完備市場におけるヘッジング理論と類似の理論が、取引コストのある市場についても構築できる、ということが示されるのである。第 5 節では、Kamizono[21] による、部分ヘッジング (partial hedging) 問題の理論について、そして最後に第 6 節では、Kamizono[22] による、効用最大化問題に関する理論について解説する。取引コストのない市場での理論との対応といった観点からは、第 5 節の内容は、Föllmer-Leukert[14, 15]、Cvitanić-Karatzas[8]、Cvitanić[4] に対応し、第 6 節の内容は、Cvitanić-Karatzas[5]、Kramkov-Schachermayer[26] に対応する。

2　モデル

本論文で取り扱う資産市場では、有限期間 $[0, T]$ において、資産 1 から資産 d までの d 個の資産が連続的に取引可能である。また、市場において各資産は他のいずれの資産とも直接交換可能であり、資産 i を引き渡す代わりに資産 j を受け取る場

合、一定比率 λ^{ij} の取引コストが生ずるものとする。すなわち、1 単位分の資産 i を取引相手に引き渡して、それと引き換えに資産 j を受け取ろうとする場合に、もし取引コストがゼロであるならば手元を離れる資産 i の量は 1 単位であるのに対し、われわれのモデルでは取引コスト λ^{ij} がかかるために、実際に手元を離れる資産 i の量は $(1+\lambda^{ij})$ 単位となるのである。ただし、そのうち実際に取引相手に渡る資産 i の量はあくまでも 1 単位であり、残りの λ^{ij} 単位は、取引コストとして消滅してゆく。この取引コストは、例えば、税金や仲介手数料、あるいはビット・オファー・スプレッドのようなものであると解釈される。このような取引コストのモデル設定は、Kabanov[19] による。

ところで、異なる二つの資産が直接交換可能であるであるとの仮定は、非現実的なものであるように見えるかも知れない。なるほど、実際の株式市場においては、一つの銘柄の株式が他の銘柄の株式と物々交換可能されることはまずない。異種の資産を交換しようとする場合には、貨幣を媒介とするのが常である。二つの資産が直接交換可能である場合として考え得るのは、外国通貨同士の交換ぐらいなものである。しかし、われわれのモデルは、以下のような理由から、貨幣を媒介とした通常の取引形態をも含んでいると考えることができる。すなわち、便宜上資産 1 を貨幣としておけば、資産 i を直接資産 j と交換したい場合、貨幣を媒介としない交換にかかる取引コスト比率は上で見た通り λ^{ij} であるのに対し、資産 i を一旦貨幣 (資産 1) を通して資産 j と交換した場合には取引コスト比率は $\lambda^{i1}+\lambda^{1j}+\lambda^{i1}\lambda^{1j}$ である。したがって、

$$\lambda^{i1}+\lambda^{1j}+\lambda^{i1}\lambda^{1j}<\lambda^{ij} \tag{2.1}$$

である場合には、合理的な投資家は取引コストのより安い、貨幣を媒介とした交換を選択するはずである。つまり、$i\neq j$ となるすべての $i\geq 2$、$j\geq 2$ に対して式(2.1) を仮定しておけば、われわれのモデルは貨幣を媒介とした交換を対象としたモデルと本質的に変わらない。ただし、以下での理論では交換が貨幣を媒介としているか否かは重要ではないので、式(2.1) は仮定せず、一般の場合を想定する。

具体的な数学的モデルの構築に入る。基礎となる完備確率空間 $(\Omega,\mathrm{F},\mathbb{P})$、およびその上での σ-加法族の増大系 (filtration) $\mathbb{F}=\{\mathrm{F}(t);\, t\in[0,T]\}$ を固定する。$\mathbb{F}$ については「通常の仮定」(usual conditions, Karatzas-Shreve [24] pp.10) を仮定する。資産 i の時点 t における価格を $S^i(t)$ で表す。資産価格プロセス $S(\cdot)\triangleq\{(S^1(t),\ldots,S^d(t));\, t\in$

$[0,T]\}$ は、**サンプル・パスが連続な**セミ・マルチンゲールであり、各資産価格 $S^i(t)$ は、つねに正の値をとるものと仮定する。また、資産1をニューメレールにとり、一般性を失うことなく $S^1(\cdot)\equiv 1$ と仮定する。用語上便利であるので、以下しばしば資産1のことを「貨幣」と呼ぶ。他方、その他の各資産 $i=2,\ldots,d$ については、資産の物理量の単位を適当に選ぶことにより、初期時点での価格 $S^i(0)$ について $S^i(0)=1$ を仮定できる。資産価格過程 $S(\cdot)$ に対し、次の仮定をおく。

仮定 2.1. 確率測度 $\mathbb{P}$ と同値な確率測度 $\mathbb{Q}$ が存在し、$\mathbb{Q}$ のもとで資産価格過程 $S(\cdot)$ はマルチンゲールとなる。

よく知られているように、取引コストのない通常の資産市場モデルにおいて、仮定 2.1 のもとでは、裁定機会が消滅している (例えば、Harrison-Pliska[17])。

さて、相異なる $i=1,\ldots,d$、$j=1,\ldots,d$ に対し、資産 i と引き換えに資産 j を得るときの取引コスト比率 λ^{ij} は非負の実数であると仮定する (すなわち、取引時点やその時の経済状態に依存しない固定比率である)。また便宜上、各 $i=1,\ldots,d$ に対し $\lambda^{ii}=0$ とおく。取引コスト比率 λ^{ij} の経済的意味は、本節のはじめに説明した通りである。なお、空売りに対しての制約は設けない。すなわち、資産 i を資産 j と引き換えに「空売り」することが可能で、その場合でも、空売りでない場合と同じ比率 λ^{ij} の取引コストがかかるものとする。

次に、このような資産市場における取引戦略を表すことを考える。通常の取引コストのない市場では、取引戦略は、各時点 t において各資産 i にどれだけの金額を投資しているかを表す確率過程として定義され、各時点 t における投資家の富みは、その時点で各資産に投資されている金額の合計として捉えられる。ところが、取引コストがかかる場合、単に各自点で各資産に投資されている金額を追うだけでは不十分であり、過去にどの資産をどの資産と交換したかを記録しておく必要がある。なぜならば、それによって今まで支払われてきた取引コストの額、したがって現在のポートフォリオの状態が違ってくるからである。われわれのモデルにおいては、取引戦略*(trading strategy)* とは、$\mathbb{R}_+^{d\times d}$ 値の $\mathbb{F}$ に適合する確率過程 $L(\cdot)\triangleq\{(L^{ij}(\cdot));t\in[0,T)\}$ であって、各要素 $L^{ij}(\cdot)$ が右連続かつ単調非減少で $L^{ij}(T-)\triangleq\lim_{t\uparrow T}L^{ij}(t)<\infty$, a.s. となるようなものと定義される。ここで、確率変数 $L^{ij}(t)$ の表す経済的内容は、これまで資産 i と引き換えにどれだけの資産 j を得てきたかを期間 $[0,t]$ で累積した金額である (物理量ではない)。したがって、取引コストを考慮すると、各時点 t の瞬間に

おいて、ポートフォリオの中の資産 i が金額にして $(1+\lambda^{ij})dL^{ij}(t)$ だけ減少し、その代わりに、資産 j が、金額にして $dL^{ij}(t)$ だけ増加することになる。

各資産の初期保有額を並べた初期保有額ベクトル*(initial holdings vector)* $x \in \mathbb{R}^d$ と、取引戦略 $L(\cdot)$ が与えられた時、時点 t における資産 i の保有額を $X_x^{iL}(t)$ で表そう。前段落での考察から、時点 t の瞬間における取引の結果、手持ちのポートフォリオに流入した資産 i の金額は

$$\sum_{j=1}^{d} dL^{ji}(t)$$

であり、また手持ちのポートフォリオから流出した資産 i の金額は、取引コスト込みで、

$$\sum_{j=1}^{d}(1+\lambda^{ij})dL^{ij}(t)$$

であることが分かる。また、時点 t の瞬間における価格変化の結果、資産 i に関して

$$X^{iL}(t-)\frac{dS^i(t)}{S(t)}$$

だけのキャピタル・ゲインが発生している。このような観察に基づき、ポートフォリオ保有額過程*(portfolio-holdings process)* $X_x^L(\cdot) \triangleq \{(X_x^{1L}(t),\ldots,X_x^{dL}(t)); t \in [0,T)\}$ を確率微分方程式

$$(2.2)\quad X_x^{iL}(t) = x^i + \int_0^t X_x^{iL}(u-)\frac{dS^i(u)}{S^i(u)} + \sum_{j=1}^{d}\left\{L^{ji}(t) - (1+\lambda^{ij})L^{ij}(t)\right\}, \qquad t \in [0,T),\ i = 1,\ldots,d.$$

によって定義する。Protter [29] の Theorem V.7 により、確率微分方程式(2.2) をみたす確率過程 $X_x^L(\cdot)$ がただ一つ存在するが、その解 $X_x^L(\cdot)$ が

$$(2.3)\quad \frac{X_x^{iL}(t)}{S^i(t)} = x^i + \sum_{j=1}^{d}\int_{[0,t]}\frac{1}{S^i(u)}\left\{dL^{ji}(t) - (1+\lambda^{ij})dL^{ij}(t)\right\}, \qquad t \in [0,T),\ i = 1,\ldots,d.$$

と書き下ろせることが伊藤の公式により容易に確認できる。式(2.3) の左辺は、時点 t における資産 i の保有量 (金額でなく物理単位) を表している。

なお、われわれのモデルにおいては、取引コストを支払うことなく手持ちの資産を貨幣に替えることはできないため、時点 t における各資産 i の保有額 $X_x^{iL}(t)$ の和 $\sum_{i=1}^d X_x^{iL}(t)$ を時点 t における投資家の富みの総額と見ることには意味がない。この点に関しては次節で再び議論する。

3 支払可能領域

いま仮に、各資産 i をそれぞれ金額にして x^i だけ保有していたとし、各 $i, j = 1, \ldots, d$ について、資産 i から資産 j へ、額にして $a^{ij} \geq 0$ だけ投資資金を移動させたとしよう。すなわち、適当な取引相手を見つけ、資産 i を資産 j と金額にして a^{ij} だけ等価交換するわけである。すると、取引コストを支払った後の新たなポートフォリオにおいて、各資産 i の保有額は、

$$x^i + \sum_{j=1}^d \left[a^{ji} - (1+\lambda^{ij})a^{ij}\right]$$

となる。したがって、もともとのポートフォリオ保有額ベクトル x が次式(3.1)で定義される集合 K に属するということは、資金移動量 $a = (a^{ij})$ をうまく選択することにより、手持ちのポートフォリオに含まれる空売りをすべて解消できる(つまり債務をすべて返済できる)ことを意味する。集合 K は、取引コストのある市場において「非負の価値」を持つポートフォリオ保有額ベクトルの集合と解釈されるわけである。

(3.1)

$$K \triangleq \left\{ x \in \mathbb{R}^d \;\middle|\; \big(\exists a \in \mathbb{M}_+^d\big)\big(\forall i = 1, \ldots, d\big) : x^i + \sum_{j=1}^d \left[a^{ji} - (1+\lambda^{ij})a^{ij}\right] \geq 0 \right\},$$

ここで、$\mathbb{M}_+^d$ は、非負実数を要素とする d 次正方行列の全体を表す。上式(3.1)で定義される集合 K を、支払可能領域*(solvency region)*と呼ぶ。

さて、二つのポートフォリオ保有額ベクトル x_1、$x_2 \in \mathbb{R}^d$ が、$x_2 - x_1 \in K$ を満たしていたとしよう。すると、定義により適当な行列 $a \in \mathbb{M}_+^d$ が存在して、各 $i = 1, \ldots, d$ に対して、

$$x_2^i + \sum_{j=1}^d \left[a^{ji} - (1+\lambda^{ij})a^{ij}\right] \geq x_1^i \tag{3.2}$$

が成り立つ。このことは、各資産 i を金額にして x_2^i だけ保有している投資家が、資金移動量 $a=(a^{ij})$ を適当に選択して前段落で述べたように取引することにより、取引後 (もちろん取引コストをも支払った上で) の各資産 i の保有額を x_1^i よりも多くすることが可能であることを示している。平たく言えば、条件 $x_2-x_1 \in K$ は、ポートフォリオ x_2 がポートフォリオ x_1 よりも高い価値をもっていることを意味するわけである。そこで、このことを数学的に表すため、空間 $\mathbb{R}^d$ 上のに関係 $\succeq$ を

$$x_1 \succeq x_2 \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} x_1 - x_2 \in K \tag{3.3}$$

によって定めよう。下の命題3.1から、関係 $\succeq$ は $\mathbb{R}^d$ の上の前順序 (partial preordering) であることが分かる。

ところで、本研究では凸解析における双対理論が一つの主要な数学的ツールとなる。そこで、まず支払可能領域 K と対になる集合として、K の <u>共役集合</u>K^* を用意する。集合 K^* は

$$K^* \triangleq \left\{ y \in \mathbb{R}^d \mid y \cdot x \geq 0,\ \forall x \in K \right\}. \tag{3.4}$$

によって定義される。集合 K および K^* は $d=2$ の場合、図1で示すような形をしている。一般に、集合 K と K^* は次の性質を持つ。

命題 3.1. 集合 K と K^* は、ともに有限個のベクトルから生成される $\mathbb{R}^d$ の閉凸錐で、$K^* \subseteq \mathbb{R}_+^d \subseteq K$ を満たす。

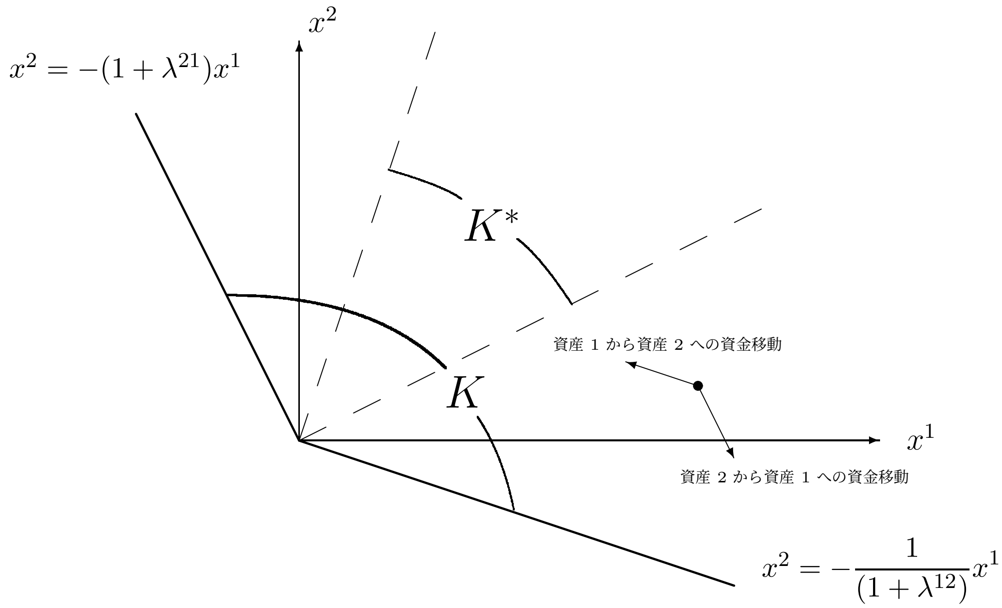
次の命題3.2は、集合 K^* の直接的な表現を与えている。

命題 3.2. 集合 K^* は以下のようにも表される。

$$K^* = \left\{ y \in \mathbb{R}_+^d \mid y^j - (1+\lambda^{ij})y^i \leq 0,\ \forall i \neq j \right\}. \tag{3.5}$$

さて、ポートフォリオ保有額ベクトル $x \in K$ が与えられたとしよう。前にも述べた通り、このことは、各資産 i を金額にして x^i だけ保有している投資家が、適当な取引を行なえば手持ちの空売りをすべて解消することができることを意味する。このとき、どれだけの資産 i を資産 j と交換すればよいか、その額 a^{ij} を並べた行列 $a \in \mathbb{M}_+^d$ は一般には一意でない。つまり、各ベクトル $x \in K$ に対し、式(3.1) の条件を成立させるような行列 $a \in \mathbb{M}_+^d$ の全体からなる集合 $A(x) \subseteq \mathbb{M}_+^d$ を対応させる写像

図 1: 支払可能領域 K と、その共役集合 K^* ($d=2$ の場合)



は、集合値関数である。次の命題 3.3 は、この集合値関数が連続選択子 (continuous selection)(連続関数 $\alpha : K \to \mathbb{M}_+^d$ であって、条件 $\alpha(x) \in A(x)$ を各 $x \in K$ に対して満たすもの) をもつことを主張している。

命題 3.3. 多価関数 $A(\cdot)$ は連続選択子 *(*したがって特に *Borel* 可測選択子*)* をもつ。

さて、前節の最後に約束した通り、ポートフォリオ保有額ベクトル $x \in \mathbb{R}^d$ の「貨幣価値」を与えよう。支払可能領域 K の定義式(3.1)、および前順序 $\succeq$ の定義式(3.3) と合わせて考えると、次式(3.6) で定義する関数 $\ell(\cdot)$ は、各ポートフォリオ保有額ベクトル $x \in \mathbb{R}^d$ に対して、x を売却して貨幣に替えたときに、得られる貨幣額が最高でどれだけになるかを対応させていることが分かる。

$$\ell(x) \triangleq \sup\{w \in \mathbb{R} \mid x \succeq (w, 0, \ldots, 0)\}, \quad x \in \mathbb{R}^d \tag{3.6}$$

一般に手持ちのポートフォリオを貨幣化する際に、各資産 i を直接貨幣に替えるよりも、別の資産 j を経由して貨幣化した方が取引コストが安くなる可能性があるので、その可能性を考慮して、関数 $\ell(\cdot)$ は式(3.6) のような形をとっているが、貨幣を媒介とした通常の取引形態、つまり条件(2.1) を仮定している場合には、

$$\ell(x) = \sum_{i=1}^{d} \left\{ \frac{1}{1+\lambda^{i1}}(x^i)^+ - (1+\lambda^{1i})(x^i)^- \right\}, \quad x \in \mathbb{R}^d$$

である。関数 $\ell(\cdot)$ を 貨幣化関数*(liquidation function)* と呼ぶ。貨幣化関数 $\ell(\cdot)$ は、次の意味で双対的な表現を持つ (Bouchard[2] Propotision 1(i))。

$$\ell(x) = \inf\left\{y \cdot x \mid y \in K^* \cap \left(\{1\} \times \mathbb{R}^{d-1}\right)\right\},\ \forall x \in \mathbb{R}^d. \tag{3.7}$$

また、直観的に自然なことではあるが、ポートフォリオ保有額ベクトル x が支払可能領域 K の内点であることと、x を貨幣化したときの貨幣価値 $\ell(x)$ が正であることとは同値である (Deelstra-Pham-Touzi[11] Lemma 3.1)。

4　優ヘッジング問題

将来時点 T において確率的な債務 (支払義務) が発生することが分かっているような投資家を考える。例えば、オプション発行者が典型的な例である。そのような投資家にとっては、初期時点 0 においてどれだけの資金を用意し、それを投資期間 $[0,T]$ 中にどのように投資すれば、最終時点 T において発生する支払義務を履行することができるのかということが問題となる。このような問題を ヘッジングの問題*(hedging problem)* という。このうち、さらに時点 T において確率 1 で債務を完全に履行できることを要求するものを、優ヘッジングの問題*(superhedging problem)*、また完全には債務を履行できなくても、あらかじめ決められた損失規準をクリアーしていることを要求するものを 部分ヘッジングの問題*(partial-hedging problem)* という。本節では、Kabanov-Last[20] による優ヘッジングの理論、続いて次節では、Kamizono[21] による部分ヘッジングの理論について概観する。

はじめに、必要な用語と記号を用意する。

まず、条件付請求権*(contingent claim)* とは、$\mathrm{F}(T)$-可測な $\mathbb{R}^d$ 値確率ベクトル G であって、適当な定数 $\kappa > 0$ に対して条件

$$G \succeq -\kappa S(T), \quad \text{a.s.} \tag{4.1}$$

を満たすものを言う。条件付請求権全体の集合を $\mathbb{L}_b$ で表す。条件付請求権 $G \in \mathbb{L}_b$ の各要素 G^i は、条件付請求権発行者が請求権保有者に対し、満期時点 T において支払う資産 i の額を表している。例えば、資産 1 が貨幣、資産 2 が株式であり、この株式の上に書かれた権利行使価格 K のコールオプションが $G = (G^1, G^2)$ であると

き、G は

$$G^1 = -\mathbf{1}_{\{S^2(T)\geq K\}}K, \quad G^2 = \mathbf{1}_{\{S^2(T)\geq K\}}S^2(T)$$

と表される。なお、式(4.1) は、条件付請求権のペイオフに対して、ある種の「下方から有界性」を課している。

条件付請求権 $G \in \mathbb{L}_b$ を発行した投資家は、満期 T において発生する負債に対応しなければばならない。つまり、一定量の初期保有額ベクトル $x \in \mathbb{R}^d$ を用意し、それを適当な投資戦略 $L(\cdot)$ でもって満期までの期間 $[0,T]$ において各資産に投資し、その結果得られるポートフォリオ保有額 $X_x^L(T-)$ を負債 G の返済に充当するわけである。言うまでもなく、はじめに用意する初期保有額 x の一部もしくは全部は、条件付請求権を発行した時点で、請求権購入者から請求家への代金として支払われた収入から賄われるべきものである。

ここで、賭事における倍賭けを思い起こそう。倍賭けとは、賭けに負ける度に賭金を倍にしてゆき勝った時点でやめるという戦略であり、倍賭けは確率 1 で正の収益が得られることを保証する。連続時間モデルににおいては有限期間中に何回でも取引をすることが可能であるため、倍賭けは理論的には可能である。そして、条件付請求権発行者が倍賭けのような戦略をとれば、満期において確率 1 で債務をカバーすることなどという問題は、自明なものとなってしまう。また他方、倍賭けは最終的に勝つまでの間に何回負けるか分からないため、倍賭けを続けられるためには無限の資金 (あるいは、いくらでも多くの資金を借りられるような状態であること) が必要である。数理ファイナンスでは通常、そのような戦略を排除するために、ポートフォリオの価値プロセスに対して、何らかの意味で、「下方からの有界性」を課す。われわれの場合、「下方からの有界性」の意味は次の通りである。

定義 4.1. $\mathbb{R}^d$ に値をもつ確率過程 $\{Y(t)\}_{t\in[0,T]}$ は、適当な定数 $\kappa > 0$ が存在して、各 $t \in [0,T]$ に対して

$$Y(t) \succeq -\kappa S(t), \quad \text{a.s.}$$

が成り立つとき、下方から S-有界(*S-bounded from below*) であると言う。

ポートフォリオ保有額過程 $X_x^L(\cdot)$ が下方から S-有界であるか否かは、取引戦略 L のみによって定まり、初期保有ベクトル $x \in \mathbb{R}^d$ には依存しないことが簡単に確認できる。われわれは以下、ポートフォリオ保有額過程 $X_x^L(\cdot)$ が下方から S-有界であるような取引戦略 L の全体を A_b で表すことにする。

定義 4.2. 初期保有ベクトル $x \in \mathbb{R}^d$ が与えられたとする。条件付請求権 $G \in \mathbb{L}_b$ は、

$$X_x^L(T-) \succeq G, \quad \text{a.s.}$$

となるような取引戦略 $L \in \mathrm{A}_b$ が存在するとき、$x \in \mathbb{R}^d$ のもと優ヘッジング可能*(super-hedgable)*であると呼ばれる。

初期保有ベクトル $x \in \mathbb{R}^d$ のもと優ヘッジング可能な条件付請求権全体の集合を $\mathbb{A}^x$ で表す。すなわち、

$$\mathbb{A}^x \triangleq \{G \in \mathbb{L}_b \mid \exists L \in \mathrm{A}_b : X_x^L(T-) \succeq G, \quad \text{a.s.}\} \tag{4.2}$$

である。

Kabanov-Last [20] の主要結果は、与えられた条件付請求権 G が初期保有ベクトル $x \in \mathbb{R}^d$ のもと優ヘッジング可能であるための必要十分条件 (以下の定理4.6) である。そこでの必要十分条件は、ポートフォリオ保有量過程 $(X_x^{1L}(\cdot)/S^1(\cdot), \ldots, X_x^{dL}(\cdot)/S^d(\cdot))$(物理単位表示) の「共役変数」の役割を果たす確率過程 $Z(\cdot)$ を用いて与えられる。そのような「共役変数」としての確率過程 $Z(\cdot)$ の満たすべき要件は、マルチンゲール性と条件

$$\mathrm{diag}[S(t)]^{-1} Z(t) \in K^* \quad \forall t \in [0,T], \tag{4.3}$$

である。確率 1 でこの条件(4.3) を満たすような $(0,\infty)^d$ 値マルチンゲール $Z(\cdot)$ 全体のなすクラスを M で表す。クラス M に属するマルチンゲールは、取引コストのない市場における同値マルチンゲール測度の密度過程に相当する。このことは次の補題によっても示唆される。

補題 4.3. 仮定 *2.1* で存在を仮定した同値確率測度 $\mathbb{Q}$ を任意に一つとり、その右連続版の密度過程を $\{\rho(t)\}_{t\in[0,T]}$ で表そう。すなわち、

$$\rho(t) = \mathbb{E}\Big[\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \,\Big|\, \mathrm{F}(t)\Big], \quad a.s., \quad \forall t \in [0,T]$$

である。また定数 $r \in \Lambda$ を任意にとる。このとき、確率過程

$$Z(t) \triangleq \rho(t)\, \mathrm{diag}[S(t)] r \quad ; \quad t \in [0,T]$$

はクラス M に属する。

次の命題 4.4 は伊藤の公式 (および確率過程 $X_x^L(\cdot)$ の下方からの S-有界性) による直接の帰結であり、定理 4.6 の主張の半分はこの命題から直ちに出る。

命題 4.4. 任意の取引戦略 $L \in \mathrm{A}_b$ と任意のマルチンゲール $Z \in \mathrm{M}$、および任意の初期保有額ベクトル $x \in \mathbb{R}^d$ に対し、確率過程

$$Z(t) \cdot \mathrm{diag}[S(t)]^{-1} X_x^L(t)\ ;\ t \in [0, T)$$

は優マルチンゲールである。

定理 4.6 では次の仮定(4.5) がおかれる。

仮定 4.5. 支払可能領域 K の共役集合 K^* は、少なくとも一つの内点を含む。すなわち、$\mathrm{int}\, K^* \neq \emptyset$ が成り立つ。

式(3.5) を用いれば、条件 $\mathrm{int}\, K^* \neq \emptyset$ が、相異なるすべてのペア $i = 1, \ldots, d$、$j = 1, \ldots, d$ に対して $\lambda^{ij} + \lambda^{ji} > 0$ となることと同値であることが確認できる。いいかえれば、仮定(4.5) は、相異なるどの二つの資産 i、j に関しても、資産 i を資産 j に替える時かもしくは資産 j を資産 i に替える時の、少なくともどちらかの方向の取引コストがゼロでない、ということを意味している。したがって、特に、定理 4.6 は取引コストのない資産市場モデルを特殊な場合としては含んでいない。

定理 4.6 (Kabanov-Last). 仮定 *4.5* が成り立っているとし、初期保有ベクトル $x \in K$ と条件付請求権 $G \in \mathbb{L}_b$ が与えられたとする。このとき、G が x のもと優ヘッジング可能であるための必要十分条件は、

$$\mathbb{E}\left[Z(T) \cdot \mathrm{diag}[S(T)]^{-1} G\right] \leq \mathbb{E}[Z(0)] \cdot x, \quad \forall Z(\cdot) \in \mathrm{M} \tag{4.4}$$

が成り立つことである。

完備市場において条件付請求権が与えられたとき、よく知られているように、その価格は満期でのペイオフの割引現在価値の期待値を、同値マルチンゲール測度のもとでとったものに等しい。さらに、その価格以上の初期保有が与えられることと優ヘッジングが可能であることとは同値である。非完備市場においては、同値マルチンゲール測度は一つではなく、どの同値マルチンゲール測度を用いるかによってペイオフの割引現在価値の期待値は異なってくる。そして、条件付請求権の優ヘッジ

ング可能性は、任意の同値マルチンゲール測度に対して初期保有がペイオフの割引現在価値の期待値以上であることと同値である (詳細は Cvitanić-Karatzas[6] など)。定理 4.6 は、このことと同様の結果が取引コストのある市場においても成り立つということを主張しているのである。

なお、先ほど少し触れたが、定理 4.6 の主張の中で、G の優ヘッジング可能性から式(4.4) を導く方は命題 4.4 からすぐ出る。難しいのは逆の方向である。証明の鍵を握るのは式(4.2) で定義した、優ヘッジング可能な条件付請求権全体の集合 $\mathbb{A}^x$ が空間 $\mathbb{L}^b$ の中で、ある意味で「閉じている」ということである。そしてもう一つ重要なことは、この空間 $\mathbb{L}^b$ で Hahn-Banach の定理の類似が成り立つことである。この二つのことから、x のもと優ヘッジング可能**でない**条件付請求権 $G \in \mathbb{L}^b$(つまり $G \notin \mathbb{A}^x$) が与えられたとき、

$$\mathbb{E}[\eta \cdot \mathrm{diag}[S(T)]^{-1}G] > \sup_{Z \in \mathrm{M}} \mathbb{E}[Z(T) \cdot \mathrm{diag}[S(T)]^{-1}G]$$

の意味で、G を集合 $\mathbb{A}^x$ から分離する確率ベクトル $\eta \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}^d_+)$ の存在が云える。そして、この η を用いて $\hat{Z}(t) \triangleq \mathbb{E}[\eta|\mathrm{F}(t)]$ としたマルチンゲールがクラス M に属することが証明され、「G が x に関して優ヘッジング可能でない $\Rightarrow$ 式(4.4) が成り立たない」の因果関係が出て、定理 4.6 の証明が完結するのである。なお、離散時間の完備市場の場合について、これと同じ論法が Harrison-Pliska[17] においてすでに用いられている。Kabanov-Last[20] は、この論法を適切な修正のもとで取引コストのある多資産市場にまで一般化した研究であると位置付けられるのである。

5　部分ヘッジング問題

前節で調べた優ヘッジングでは、将来に発生する債務について、いかなる状況においても (すなわち確率 1 で)、不足分なく債務を遂行できることが要求される。ただし、債務を遂行してもなお余剰が出ることは一向に差し支えない。条件付請求権の発行者の取る戦略として最も手堅い、この優ヘッジング戦略は、しかし、しばしば過剰なまでの初期資金を必要とする。例えば、Black-Scholes タイプの対数正規株価過程のモデルにおいて、コールオプションを優ヘッジングするために必要な初期保有は、原資産である株 1 単位に等しい。このような悲観的結果は、Davis-Clark[9] によって予想され、Soner-Shreve-Cvitanić [33] によって証明された。そしてこの場

合、最適な取引戦略は、ただ単に株をオプション満期まで持ち続け、満期において相手が権利行使してきたら手持ちの株を権利行使価格で引き渡すという、単純な買い持ち (simple buy-and-hold) 戦略である。また、より一般に多資産の場合でも、原資産価格過程がブラウン運動でドライブされるマルコフ型の確率微分方程式にしたがい、なおかつボラティリティーを表す行列が退化しないような場合には、経路独立 (path-independent) なヨーロッパ型の条件付請求権の優ヘッジングに対しては単純な買い持ち戦略が最適であることが分かっている (Bouchard-Touzi[3])。

単純な買い持ち戦略が最適なヘッジング戦略であるという主張の持つ意味は非常に大きい。例えばコールオプションを考えてみよう。そもそもコールオプションの存在意義は、将来原資産を購入する予定である個人や企業が原資産価格上昇によるリスクを回避できるように、原資産を一定の価格以下で買付けられることを保証するということである。もしもそのようなコールオプションを発行する金融機関がリスクを避けて優ヘッジング戦略をとるならば、必要な初期保有は原資産 1 単位になるわけで、この金融機関によって提供されるコールオプションの価格は原資産の価格と等しくなってしまう。これでは顧客の投資家にとっては、将来購入することになっている原資産を今すぐ購入せよと言われているのと同じことになってしまうため、オプションを購入する意味は全くなくなってしまうのである。

このような理由により、条件付請求権発行者にとっての本質的な課題は、損失が発生するリスクをある程度は受容するようなヘッジング戦略をとることとなる。そこで優ヘッジングに代わるものとして、部分ヘッジングが関心の対象となるのである。本論文では、Kamizono[21] による議論を概観する。なお、部分ヘッジング問題は、完備市場の場合について、Föllmer-Leukert[14, 15]、Cvitanić-Karatzas[8]、取引コストはゼロであるが非完備な市場については、Cvitanić[4]、不完全情報の場合については、Karatzas[23] や Spivak-Cvitanić[34] などで議論されている。

なお、本節で扱う部分ヘッジ問題、および次節で述べる効用最大化問題では、許容する取引戦略としては、ポートフォリオ保有額過程 $X_x^L(\cdot)$ に対する下方から S-有界性よりやや強い条件を満たすものを考える。

定義 5.1. 初期保有額ベクトル $x \in \mathbb{R}^d$ が与えられたとする。取引戦略 $L(\cdot)$ は、「非破産」条件

$$X_x^L(t) \succeq 0, \quad \forall t \in [0, T), \quad \text{a.s.} \tag{5.1}$$

を満たすとき、x について 許容可能*(admissible)*であると呼ばれる。

初期保有額ベクトル x について許容可能な取引戦略の全体を $\mathrm{A}_+(x)$ で表す。つまり、

$$\mathrm{A}_+(x) \triangleq \{L \in \mathrm{A}_b \mid X_x^L(t) \succeq 0, \quad \forall t \in [0,T), \quad \text{a.s.}\} \tag{5.2}$$

部分ヘッジング問題の具体的な内容に入る。まず、Kamizono[21] では、条件付請求権としてはペイオフが貨幣 (資産 1) の形で発生するものが想定されている。つまり、条件付請求権の決済は実物渡しではなく、差金決済である。また、ヘッジングに割り当てる初期資本も、貨幣 (資産 1) の形で与えられるような状況を想定している。初期時点 0 での資産売買は可能であるから、このこと自体は本質的になんの制約にもならない。なお、式(2.2) で導入した記号 $X_x^L(t)$ では、添字 x は各資産の初期保有を並べたベクトルを意味していたが、本節に限り若干の記号の濫用をお許し頂くとして、記号 $X_x^L(t)$ の添字 x は、本節での仮定にしたがい、貨幣 (資産 1) の形で与えられた初期保有、つまりスカラーであるとする。つまり、式(2.2) での記法にしたがえば、$X_{(x,0,\dots,0)}^L(t)$ のことを意味する。記号 $\mathrm{A}_+(x)$ についても同様で、本節に限り記号 $\mathrm{A}_+(x)$ は式(5.2) の記法での $\mathrm{A}_+((x,0\dots,0))$ を意味するものとする。

ヘッジすべき条件付請求権は差金決済型であるから、ペイオフは $\mathrm{F}(T)$-可測の実数値確率変数 G で表現される。部分ヘッジング問題とは、与えられたリスク尺度を最小にするような取引戦略を探すことであるから、まずリスク尺度を導入しなければならない。本稿では、Föllmer-Leukert[15]、Cvitanić-Karatzas[8] などで紹介されている、平均不足額*(expected shortfall)*をリスク尺度として採用する。具体的には、われわれの場合、満期 T における債務は G であり、これを初期保有額 x の期間 $[0,T]$ における運用益 $\ell(X_x^L(T-))$ でカヴァーしようとするのであるから、平均不足額は

$$\mathbb{E}(G - \ell(X_x^L(T-)))^+$$

と定義される。したがって、平均不足額最小化問題は、以下である。

> 所与の初期保有額 $x \geq 0$ のもと、平均不足額
> $\mathbb{E}\big(G - \ell(X_x^L(T-))\big)^+$ を $L \in \mathrm{A}_+$ に関し最小化せよ。

また、この最適化問題に対する最適値関数は、

$$V(x) \triangleq \inf_{L \in \mathrm{A}(x)} \mathbb{E}\big(G - \ell(X_x^L(T-))\big)^+ \tag{5.3}$$

である。

平均不足額最小化問題に関する具体的な議論を先に進める前に、差金決済型の条件付請求権 G の優ヘッジングについて簡単に要約しておく。まず、一般の場合の優ヘッジングの結果 (定理 4.6) から、次のことが証明できる。

命題 5.2. 仮定 *4.5* が成り立っているとし、初期保有額 $x \in \mathbb{R}$ と差金決済型の条件付請求権 G が与えられたとする。このとき、G が x のもと優ヘッジング可能であるための必要十分条件は、

$$\mathbb{E}\left[Z(T)G\right] \leq x \tag{5.4}$$

がすべての $Z(\cdot) \in \mathrm{N}$ に対して成り立つことである。ただし、N は、$\mathbb{R}$-値マルチンゲール $\{Z(t)\}_{t\in[0,T]}$ であって、適当な $\mathbb{R}^{d-1}$-値マルチンゲール $\{(Z^2(t),\ldots,Z^d(t)\}_{t\in[0,T]}\}$ に対して、$\mathbb{R}^d$-値マルチンゲール $\{(Z(t),Z^2(t),\ldots,Z^d(t))\}_{t\in[0,T]}$ が M に属するようなもの全体を表す。

与えられた初期保有量 $x \in \mathbb{R}$ のもとで優ヘッジング可能な、非負の差金決済型条件付請求権の全体を、$\mathrm{G}(x)$ で表そう。すなわち、$\mathrm{G}(x)$ の定義は、

$$\mathrm{G}(x) \triangleq \{G \in \mathbb{L}^0(\mathbb{R}_+) \mid \exists L \in \mathrm{A}_b : \ell(X^L_x(T-)) \geq G\} \tag{5.5}$$

である。ただし、ここで、一般に Borel 集合 E に対し、$\mathbb{L}^0(E)$ は $\mathrm{F}(T)$-可測な E 値確率変数の集合を表すものとする。Kabanov-Last[20] の Lemma 3.3 によれば、条件 $\ell(X^L_x(T-)) \geq 0$ から条件 "$\ell(X^L_x(t)) \geq 0$、$\forall t \in [0,T)$" が出るから、集合 $\mathrm{G}(x)$ の定義式(5.5) の右辺で、A_b を $\mathrm{A}_+(x)$ に取り替えてもよい。つまり、

$$\mathrm{G}(x) \triangleq \{G \in \mathbb{L}^0(\mathbb{R}_+) \mid \exists L \in \mathrm{A}_+(x) : \ell(X^L_x(T-)) \geq G\}$$

この定義から、もとの最適化問題の最適値関数(5.3) が

$$V(x) = \inf_{\xi\in\mathrm{G}(x)} \mathbb{E}(G-\xi)^+, \quad \forall x \in \mathbb{R} \tag{5.6}$$

と書けることがすぐ分かる。また、式(5.6) に現れる下限を達成するような確率変数 $\xi \in \mathrm{G}(x)$ が選べたとすると、集合 $\mathrm{G}(x)$ の定義により直ちに、$\ell(X^L_x(T-)) \geq \xi$ となる取引戦略 $L \in \mathrm{A}_+(x)$ の存在が分かるが、この $L(\cdot)$ がもとの平均不足額最小化問題の一つの解になっていることもすぐに分かる。この意味で、もとの平均不足額最小化問題は、次の最適化問題 (本節では、以下**主問題**と呼ぶ) に同等である。

所与の初期保有額 $x \geq 0$ のもと、期待値 $\mathbb{E}(G-\xi)^+$ を $\xi \in \mathrm{G}(x)$ に関し最小にせよ。

さて、命題 5.2 により

$$\mathrm{G}(1) = \{G \in \mathbb{L}^0(\mathbb{R}_+) \mid \forall Z(\cdot) \in \mathrm{N} : \mathbb{E}[Z(T)G] \leq 1\}$$

が成り立つが、これはすなわち、空間 $\mathbb{L}^0(\mathbb{R}_+)$ において $\mathrm{G}(1)$ が集合 $\{Z(T) \mid Z \in \mathrm{N}\}$ の極集合であることを云っている。ここで、任意の集合 $A \subseteq \mathbb{L}^0(\mathbb{R}_+)$ に対し A の極集合*(polar set)* とは、

$$A^\circ \triangleq \{g \in \mathbb{L}^0(\mathbb{R}_+) \mid \forall f \in A : \mathbb{E}[fg] \leq 1\} \tag{5.7}$$

で定義される集合 A° のことを意味する。つまり、命題 5.2 の主張は

$$\mathrm{G}(1) = \mathrm{H}_0^\circ \tag{5.8}$$

である。ただし、

$$\mathrm{H}_0 \triangleq \{Z(T) \mid Z \in \mathrm{N}\} \tag{5.9}$$

とおいた。なお、$\mathrm{G}(x) = x\mathrm{G}(1)$ であることは命題 5.2 とは独立に定義から簡単にチェックできるから、命題 5.2 の主張の本質は式(5.8) に他ならない。なお、前にも注意したように、M に属するマルチンゲールは取引コストが存在しない市場の状態価格密度としての意味を持つ。したがって、標語的に言うならば、**優ヘッジング可能な条件付請求権の集合は状態価格密度全体の集合と共役関係をなす**のである。

さて、われわれは後に、式(5.3) の最適値関数で表される最適化問題を解く際に、双対問題を経由することになるのであるが、鍵となるのは双対問題の解の存在である。大まかに言えば、ここでいう双対問題は、もとの空間 $\mathrm{G}(x)$ の「共役空間」の上で、目的関数の「共役関数」を最大化するというものであり、その解の存在のためには、何らかの意味で「共役空間」が「閉じて」いることが重要となる。式(5.8) が示唆するところは、集合 $\{Z(T) \mid Z \in \mathrm{N}\}$ が、$\mathrm{G}(1)$ の「共役空間」としての候補となる、ということではあるのだが、残念ながら一般にこの集合 H_0 は、定理 5.5 の証明で用られる位相であるところの、確率収束の位相のもとで閉じていない。そこで、H_0 に代わるものとして $\mathrm{G}(1)$ の極集合

$$\mathrm{H} \triangleq \mathrm{G}(1)^\circ = \{H \in \mathbb{L}^0(\mathbb{R}_+) \mid \forall G \in \mathrm{G}(1) : \mathbb{E}[HG] \leq 1\} \tag{5.10}$$

を導入する。式(5.8) によれば H は H_0 の双極集合 (bipolar set) である。すなわち、

$$\mathrm{H} = \mathrm{H}_0^{\circ\circ} \triangleq ((\mathrm{H}_0)^{\circ})^{\circ} \tag{5.11}$$

である。集合 $\mathrm{G}(1)$ および H について以下が成り立つ。

命題 5.3. **(i)** 集合 $\mathrm{G}(1)$ と H は、それぞれ $\mathbb{L}^0(\mathbb{R}_+)$ の凸部分集合で確率収束の位相のもとで閉である。それらはまた凸体をなす。

(ii) 確率変数 $G,\ H \in \mathbb{L}^0(\mathbb{R}_+)$ に対し、それぞれ以下が成り立つ。

(a) $G \in \mathrm{G}(1)$ となるための必要十分条件は、$\sup_{H\in\mathrm{H}} \mathbb{E}[HG] \le 1$ が成り立つことである。

(b) $H \in \mathrm{H}$ となるための必要十分条件は、$\sup_{G\in\mathrm{G}(1)} \mathbb{E}[HG] \le 1$ が成り立つことである。

(iii) 定数 1 は $\mathrm{G}(1)$ に属する。

(iv) 集合 H は $\mathbb{L}^1(\mathbb{R}_+)$ で有界である。

ここで、凸集合 $A \subseteq \mathbb{L}^0(\mathbb{R}_+)$ が <u>凸体</u>*(solid convex set)* であるとは、$f \in A$ と $g \in \mathbb{L}^0(\mathbb{R}_+)$ が $g \le f$ a.s. を満たすときにはいつでも $g \in A$ となることを言う。なお、同値マルチンゲール測度の密度過程の双極 (bipolar) を共役空間に選んで双対問題を経由して主問題を解くというアイディアを最初に紹介した論文は、Kramkov-Schachermayer[26] である。そこでは、非完備市場における効用最大化問題に対してこのアイディアが用いられている。Kramkov-Schachermayer[26] のアイディアの核にあるのは、Brannath-Schachermayer [1] の双極定理 (bipolar theorem) である。実際この双極定理によれば、双極集合 $\mathrm{H} = (\mathrm{H}_0)^{\circ\circ}$ は、H_0 を含み確率収束の位相のもとで閉となる最小の凸体 (solid convex set) である。つまり、集合 H は H_0 を必要最小限に拡張して得られる集合なのである。特に、確率変数 $G \in \mathbb{L}^0(\mathbb{R}_+)$ に対し、もとの集合 H_0 の上でとられた上限 $\sup_{H\in\mathrm{H}_0} \mathbb{E}[HG]$ と H_0 の双極集合 $\mathrm{H} = (\mathrm{H}_0)^{\circ\circ}$ の上でとられた上限 $\sup_{H\in\mathrm{H}} \mathbb{E}[HG]$ とは一致する。

さて、もとの最適化問題(5.3) の双対問題を考えるため、目的関数の共役を定義しよう。まず、各 $g \ge 0$ に対し、関数 $R_g(\cdot)$ を

$$R_g(u) \triangleq (g-u)^+, \quad u \ge 0$$

と定義しておき、主問題の最適値関数(5.6) を

$$V(x) = \inf_{\xi \in \mathrm{G}(x)} \mathbb{E}[R_G(\xi)], \quad x \in \mathbb{R} \tag{5.12}$$

と書いておく。この関数 $R_g(\cdot)$ に対し、$R_g(\cdot)$ の 共役関数$\tilde{R}_g(\cdot)$ を

$$\tilde{R}_g(z) \triangleq \inf_{u \geq 0}[(g-u)^+ + vu] = (1 \wedge v)g, \quad v \geq 0.$$

で定義する。適当に符合を変えてあるが、関数 $\tilde{R}_g(\cdot)$ は、凸解析の分野での、凸関数 $R_g(\cdot)$ の共役関数 (convex conjugate) に他ならない (例えば、Rockafellar[30])。関数 $\tilde{R}_g(\cdot)$ の定義により、

$$(g-u)^+ \geq (1 \wedge v)g - vu, \quad \forall u \geq 0,\ \forall v \geq 0, \tag{5.13}$$

が成り立つことがすぐ分かる。さらに

$$u \in I_g(v), \tag{5.14}$$

ならば、式(5.13) で等号が成り立つ。ただし、各 $g \geq 0$ に対し、$I_g(\cdot)$ は

$$I_g(v) \triangleq \left\{ \begin{array}{lll} \{g\} & \text{if} & 0 \leq v < 1 \\ [0,g] & \text{if} & v = 1 \\ \{0\} & \text{if} & v > 1 \end{array} \right\}. \tag{5.15}$$

で定義される集合値関数である。

　さて、$\xi \in \mathrm{G}(x)$、 $z \geq 0$ および $H \in \mathrm{H}$ が任意に与えられたとき、式(5.13) と命題 5.3 の **(ii)** とから、

$$\mathbb{E}(G-\xi)^+ \geq \mathbb{E}[(1 \wedge zH)G] - z\mathbb{E}[H\xi] \geq \mathbb{E}[(1 \wedge zH)G] - zx, \tag{5.16}$$

であることが分かる。ここで、

$$\xi \in I_G(zH) \quad \text{a.s. および} \quad \mathbb{E}[H\xi] = x. \tag{5.17}$$

ならば式(5.16) で等号が成り立つ。さらに、式(5.17) の第一の条件は、$0 \leq U \leq G$ を確率 1 で満たすような適当な確率変数 $U \in \mathbb{L}^0(\mathbb{R}_+)$ が存在して、

$$\xi = G1_{\{zH<1\}} + U1_{\{zH=1\}}, \quad a.s. \tag{5.18}$$

と書けるということに同値である。これより、与えられた $z > 0$、$H \in \mathrm{H}$ および $U \in \mathbb{L}^0(\mathbb{R}_+)$ のもと、式(5.18) によって決まる確率変数 ξ が、式(5.6) に現れる下限を達成するためには、$x \in \mathrm{G}(x)$ かつ $\mathbb{E}[H\xi] = x$ が必要十分であることが分かる。

以上までの観察のもと、もとの最適化問題に対する双対問題として、次のような最大化問題を考える。

実数 $z \geq 0$ を所与として、期待値 $\mathbb{E}[(1 \wedge zH)G]$ を $H \in \mathrm{H}$ に関し最大にせよ。

また、この問題の最適値関数 $\tilde{V}(\cdot)$ を

$$\tilde{V}(z) \triangleq \sup_{H \in \mathrm{H}} \mathbb{E}[(1 \wedge zH)G], \quad z \geq 0 \tag{5.19}$$

によって定義する。式(5.16) から直ちに分かるように、$V(x) \geq \tilde{V}(z) - zx$ がすべての $x > 0$ および $z > 0$ に対して、したがって、

$$V(x) \geq \sup_{z \geq 0} \big[\tilde{V}(z) - zx\big] \tag{5.20}$$

がすべての $x \geq 0$ に対して成り立つ。実はここで等号が成り立つ、ということは下の定理 5.5 の主張の一つである。定理 5.5 では、次の仮定 5.4 が置かれる。

仮定 5.4. 差金決済型の条件付請求権 $G \in \mathbb{L}^0(\mathbb{R}_+)$ は、条件

$$\mathbb{E}[G] < \infty \quad \text{and} \quad G(0) \triangleq \sup_{H \in \mathrm{H}} \mathbb{E}[HG] < \infty. \tag{5.21}$$

を満たすものとする。

仮定 5.4 のもとでは、G は初期保有量 $x \geq G(0)$ のもと優ヘッジング可能である。その場合、特に $V(x) = 0$ であるから、部分ヘッジングの問題を考えることは意味がない。部分ヘッジング問題として専ら興味があるのは、$0 < x < G(0)$ の場合である。

定理 5.5 (Kamizono). *仮定 5.4 のもと、初期保有量 $0 < x < G(0)$ が与えられたとする。このとき、*

(i) 任意の定数 $\hat{z} > 0$ に対し、式(5.19) に現れる上限を達成する確率変数 $\hat{H}(z) \in \mathrm{H}$ が存在する。

(ii) 式(5.20) の右辺に現れる上限を達成する定数 $\hat{z} > 0$ が存在する。

(iii) 主問題最適値関数 $V(\cdot)$ と双対問題最適値関数 $\tilde{V}(\cdot)$ とは、互いに共役関係にある。すなわち、

$$V(x) = \sup_{z>0}\big[\tilde{V}(z) - zx\big], \quad \forall 0 < x < G(0) \tag{5.22a}$$

$$\tilde{V}(z) = \inf_{z>0}\big[V(x) + xz\big], \quad \forall z > 0 \tag{5.22b}$$

が成り立つ。

(iv) 条件 $0 \le U \le G$ を確率 1 で満たす確率変数 $U \in \mathbb{L}^0(\mathbb{R}_+)$ であって、上で与えられた $\hat{z} > 0$ および $\hat{H} \equiv \hat{H}(\hat{z}) \in \mathrm{H}$ とを用いて式

$$\hat{\xi} \triangleq G1_{\{\hat{z}\hat{H}<1\}} + U1_{\{\hat{z}\hat{H}=1\}} \tag{5.23}$$

で定義される確率変数 $\hat{\xi}$ が集合 $\mathrm{G}(x)$ に属し、かつまた条件 $\mathbb{E}[\hat{H}\hat{\xi}] = x$ をも満たし、したがって主問題の解となるようなもの、そういった確率変数 U が存在する。

定理の証明は Kamizono[21] の Chapter 3 で見つけることができる。なお、命題 5.3 の前に述べたように、すべての鍵は双対問題の解 H の存在にある。実際、命題 5.3 の **(iv)** によれば、凸集合 H は確率収束の位相に関して閉じていて、かつ $\mathbb{L}^1$-有界である。このことと目的関数が凹関数であることとを合わせ、さらに Komlós の定理 (例えば Schwartz[31]) を用いることによって、双対問題の解の証明が微積分学での Weirstrass の最大値・最小値定理の証明と同様にしてできるのである。

最後に、命題 5.3 は二つの集合 G(1) と H とが「共役的」な性質を持っていることを主張しているが、特に **(iv)** でいう「$\mathbb{L}^1$- 有界性」の「共役的」性質が **(iii)** でいう「定数 1 を含むこと」に相当することを思い起こそう。すなわち、集合 H とは異なり、一般に集合 G(1) は $\mathbb{L}^1$-有界ではない。この事実のために、Komlós の定理等を用いて双対問題の最適解の存在を示す、という手法と同じ手法を主問題に対して応用して、主問題の最適解の存在を直接に証明することはできないのである。そもそも、主問題を解くために双対問題を経由する理由はここにあったわけである。

6　効用最大化問題

本節では、初期時点 0 に初期ポートフォリオ保有額 $x \in \mathbb{R}^d$ が与えられた投資家が投資期間 $[0, T]$ において各資産 $i = 1, \dots, d$ に投資し、取引最終時点 T における効用の期待値を最大にする、という効用最大化問題を考える。取引コストのある市場におけるこのような効用最大化問題、およびそれと類似の問題に関する研究は、Davis-Norman[10] に遡る。Davis-Norman[10] は、危険資産が 1 種類で価格過程が対数正規過程の場合の無限期間モデルにおいて、期間中の消費から得られる期待効用の最大化問題を考え、ベキ型効用関数 (power utility function) の場合について、最適値関数、および最適投資戦略を明示的に導出している。彼らの手法は、動的計画法から導出される偏微分方程式を解く、というものである。動的計画法アプローチに関するより立ち入った議論、特に非線形偏微分方程式の粘性解 (viscosity solution) との関連性については、Shreve-Soner[32] や Zariphopoulou[35] に詳しい。他方、マルチンゲール理論と凸解析を応用したアプローチは、1 危険資産の場合の理論を取り扱った Cvitanić-Karatzas[7] がプロトタイプである。その後の多資産市場への一般化は、Kabanov[19] に始まる。ただし、ここまでの論文では効用関数は、ポートフォリオ保有額過程 $X_x^L(\cdot)$ の貨幣価値 $\ell(X_x^L(\cdot))$ を独立変数にとる、1 変数効用最大化である。これに代わって多変数効用関数を最初に取り入れた研究が、Deelstra-Pham-Touzi[11] である。ただし、取引コストのない完備市場の場合で多変数効用関数を用いた効用最大化問題は、Lakner[28] にまで遡る。Deelstra-Pham-Touzi[11] は、取引コストのある市場における効用最大化問題に関する一般的な理論、特に Kramkov-Schachermayer[26] の非完備市場における理論と類似の理論を目指しているが、効用関数の設定の仕方が貨幣錯覚を許すようなものになっていることや、Kramkov-Schachermayer[26] との類似の理論を組み立てる辺りの議論の整備が完全ではなく、当初の目的を達成しているとは言えない。Kamizono[22] は、効用関数の定式化を貨幣錯覚から自由であるようなものに修正し、さらに双対理論の応用の仕方に工夫を加えて、取引コストのある多資産市場においても、Kramkov-Schachermayer[26] のオリジナルの議論がほぼ平行に進んでゆくこと示している。以下の本節の議論は Kamizono[22] による。

まず、効用関数を定義する。

定義 6.1 (効用関数). 次の 3 つの条件を満たす関数 $U \colon \mathbb{R}_+^d \to \mathbb{R}$ を <u>効用関数</u>*(utility function)* と呼ぶ。

(i) U は、集合 $\mathbb{R}^d_+$ 上において、上半連続かつ凹で、

$$\sup_{c\in\mathbb{R}^d_+} U(c) = \infty \tag{6.1a}$$

$$\inf_{c\in\mathbb{R}^d_+} U(c) = U(0) = 0 \tag{6.1b}$$

を満たす。

(ii) U は次の意味で「単調増加」である。

各 $i = 1,\ldots,d$ について $c_1^i \leq c_2^i$ であるとき、$U(c_1) \leq U(c_2)$ が成り立つ。

(iii) U は、集合 $(0,\infty)^d$ 上において、C^1 級かつ強凹で、導関数

$$\nabla U(\cdot) \triangleq \left(\frac{\partial U}{\partial c^1}(\cdot),\ldots,\frac{\partial U}{\partial c^d}(\cdot)\right)$$

は $(0,\infty)^d$ の上の全単射であり、また集合 $(0,\infty)^d$ の境界に収束するいかなる点列 $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq (0,\infty)^d$ に対しても、

$$\lim_{n\to\infty} |\nabla U(c_n)| = \infty$$

が成り立つ。

本節はじめにも述べたように、われわれは投資期間の最終時点 T におけるポートフォリオの状態から効用を得る投資家の効用最大化問題を考える。ここで、効用関数 U の独立変数としてふさわしいのは、物理量で測ったポートフォリオ保有量 $\mathrm{diag}[S(T)]^{-1}X^L_x(T-)$ であって、貨幣で測ったポートフォリオ保有額 $X^L_x(T-)$ ではない。さもなくば投資家は貨幣錯覚に陥っていることになる (この点についてはKamizono[22] を見よ)。また、前節で考えた部分ヘッジング問題の場合と同様、本節においても許容する取引戦略を「非破産」条件(5.1) を満たすようなものに限る。初期保有ベクトル $x \in \mathbb{R}^d$ に関して許容可能な取引戦略全体の集合を $\mathrm{A}_+(x)$ で表す (式(5.2))。さらに、確率ベクトルの集合

$$\mathrm{C}_x \triangleq \{B \in \mathbb{L}^0(\mathbb{R}^d_+) \mid \exists L \in \mathrm{A}_x : X^L_x(T-) \succeq \mathrm{diag}[S(T)]B\}. \tag{6.2}$$

を定義する。この定義中の確率ベクトル B の各要素 B^i は、投資期間最終時点 T における資産 i の保有量 (物理単位!) を表しているものと解釈される。すなわち、条件

$B \in \mathrm{C}_x$ が意味することは、初期保有ベクトル x から出発して、適当な許容可能な取引戦略 $L \in \mathrm{A}_+(x)$ をとって期間 $[0, T]$ にわたって投資することによって、取引最終時点 T において各資産 i をそれぞれ B^i 単位だけ保有するような状態を確率 1 で実現できるということである。つまり、条件 $B \in \mathrm{C}_x$ は、条件付請求権 $\mathrm{diag}[S(T)]G$ が初期保有額ベクトル x に関して優ヘッジング可能であるという条件そのものである。

Kamizono[22] で扱われている効用最大化問題は以下である。

> 所与の初期保有額ベクトル $x \in \mathbb{R}^d$ に対し、期待効用 $\mathbb{E}[U(B)]$ を $B \in \mathrm{C}_x$ に関し最大化せよ。

この最適化問題に対する <u>最適値関数</u>*(optimum value function)* は、

$$V_x \triangleq \sup_{B \in \mathrm{C}_x} \mathbb{E}[U(B)], \quad x \in \mathbb{R}^d \tag{6.3}$$

である。なお、興味があるのは、初期保有額ベクトル x が「正」の場合、つまり、$x \in \mathrm{int}\, K$ の場合のみである。また、つまらぬ場合を排除するために次の仮定をおく。

仮定 6.2. 少なくとも一つの $x_0 \in \mathrm{int}\, K$ に対し、$V_{x_0} < \infty$ が成り立つ。

凸解析を応用するため、与えられた効用関数 U に対し、その共役関数 $\tilde{U}$ を

$$\tilde{U}(y) \triangleq \sup_{x \in \mathbb{R}^d_+} [U(c) - y \cdot c], \quad y \in \mathbb{R}^d_+ \tag{6.4}$$

で定義する。1 変数効用関数の場合 (Karatzas-Shreve [25] Lemma 3.4.3) と同様、以下が成り立つ。

補題 6.3. **(i)** $\tilde{U}$ は、集合 $\mathbb{R}^d_+$ 上において、下半連続かつ凸で効用関数 U との関係

$$U(c) = \inf_{y \in \mathbb{R}^d_+} [\tilde{U}(y) + c \cdot y], \quad c \in \mathbb{R}^d_+ \tag{6.5}$$

を満たす。

(ii) $\tilde{U}$ は次の意味で「単調減少」である。

> 各 $i = 1, \ldots, d$ について $y_1^i \leq y_2^i$ であるとき、$\tilde{U}(y_1) \geq \tilde{U}(y_2)$ が成り立つ。

(iii) $\tilde{U}$ は、集合 $(0, \infty)^d$ 上において、C^1 級かつ強凸で、導関数は、$\nabla \tilde{U} = -I$ を満たす。但し、I は関数 ∇U の逆関数を表す。

(iv) 各ベクトル $y \in (0,\infty)^d$ に対し、式(6.4) に現れる上限は、$c = I(y)$ において唯一達成される。特に、

$$\tilde{U}(y) = U(I(y)) - y \cdot I(y), \quad \forall y \in (0,\infty)^d \tag{6.6}$$

が成り立つ。

(v) 各ベクトル $c \in (0,\infty)^d$ に対し、式(6.5) に現れる下限は、$y = \nabla U(c)$ において唯一達成される。特に

$$U(c) = \tilde{U}(\nabla U(c)) + c \cdot \nabla U(c), \quad \forall c \in (0,\infty)^d \tag{6.7}$$

が成り立つ。

(vi) 次の 2 式が成り立つ。

$$\inf_{y \in \mathbb{R}_+^d} \tilde{U}(y) = 0 \tag{6.8a}$$

$$\sup_{y \in \mathbb{R}_+^d} \tilde{U}(y) = \tilde{U}(0) = \infty. \tag{6.8b}$$

例 6.4 (加法型効用関数). 1 変数効用関数 $u_i \colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ を 1 変数の効用関数の和として、

$$U(c) \triangleq \sum_{i=1}^{d} u_i(c^i), \quad c = (c^1, \ldots, c^d) \in \mathbb{R}_+^d, \tag{6.9}$$

のように書ける効用関数 U を加法型効用関数と呼ぶ。加法型効用関数に対しては、共役関数 $\tilde{U}$ は和を構成する各 u_i の共役関数 $\tilde{u}_i$ を用いて

$$\tilde{U}(y) = \sum_{i=1}^{d} \tilde{u}_i(y^i), \quad y = (y^1, \ldots, y^d) \in \mathbb{R}_+^d, \tag{6.10}$$

と表される。さらに、ψ_i を導関数 u_i' の逆関数とすれば、

$$\tilde{U}(y) = \sum_{i=1}^{d} u_i(\psi_i(y^i)) - y^i \psi_i(y^i), \quad \forall y \in (0,\infty)^d, \tag{6.11}$$

となることが分かる。すなわち、$I(y) \triangleq (\psi_1(y^1), \ldots, \psi_d(y^d))$, $\forall y \in (0,\infty)^d$ が成り立つ (Lakner [28] Example 2.3)。

例 6.5 (CRRA(Constant Relative Risk Aversion) 型). $\delta_1, \ldots, \delta_d$ を、$\delta \triangleq \sum_{i=1}^{d} \delta <$ 1 を満たすような正定数として、関数 U を

$$U(c) \triangleq \prod_{i=1}^{d} (c^i)^{\delta_i}, \quad c = (c^1, \ldots, c^d) \in \mathbb{R}_+^d \tag{6.12}$$

のように定義すれば、U は効用関数としての要件を満たすことが容易に分かる。導関数 $\nabla U(\cdot)$ とその逆関数 $I(\cdot)$ は

$$\nabla U(c) = \prod_{i=1}^{d} (c^i)^{\delta_i} \Big(\frac{\delta^1}{c^1}, \ldots, \frac{\delta^d}{c^d} \Big)$$
$$I(y) = \prod_{i=1}^{d} \Big(\frac{\delta_i}{y^i} \Big)^{\frac{\delta_i}{1-\delta}} \Big(\frac{\delta^1}{y^1}, \ldots, \frac{\delta^d}{y^d} \Big)$$

で与えられ、また U の共役関数は

$$\tilde{U}(y) = (1 - \delta) \prod_{i=1}^{d} \Big(\frac{\delta^i}{y^i} \Big)^{\frac{\delta^i}{1-\delta}}$$

で与えられる (Example 2.4 of [28])。Hanoch [16] は、多変数版の Arrow-Pratt 相対リスク回避度 (Arrow-Pratt index of relative risk aversion) を

$$r(c) \triangleq -\frac{c \cdot \nabla U(c)}{\nabla U(c)' [\nabla^2 U(c)]^{-1} \nabla U(c)}, \quad \forall c \in (0, \infty)^d \tag{6.13}$$

で定義している。但し、$\nabla^2 U(\cdot)$ は $U(\cdot)$ のヘッセ行列を表す。式(6.12) で与えられる効用関数 U に対しては、Arrow-Pratt 相対リスク回避度は、$1 - \delta$ である。また、後の式(6.14) で定義される多変数版の漸近弾力性 (asymptotic elasticity) は δ に等しい。

Kramkov-Schachermayer [26] は、1 変数の効用関数について漸近弾力性 (asymptotic elasticity) を定義し、効用関数の漸近弾力性が 1 より小さいという仮定が、非完備市場における効用最大化問題の解の存在に対しては重要であることを指摘している。次の仮定 6.6 はその自然な拡張である。この仮定は後に定理 6.11 で用いられる。

仮定 6.6. 効用関数 U は、

$$AE(U) \triangleq \varlimsup_{c \cdot \mathbf{1} \to \infty} \frac{c \cdot \nabla U(c)}{U(c)} < 1 \tag{6.14}$$

を満たす。

式(6.14)の中の $AE(U)$ を、効用関数 U の 漸近弾力性*(asymptotic elasticity)*と呼ぶ。特に $d=1$ の場合は、Kramkov-Schachermayer[26]のオリジナルの Definition 2.2 と同等である。

さて、効用関数 U が 1 変数の場合、定義 6.1 に現れる性質から $\lim_{y\downarrow 0} I(y) = \infty$ がすぐ分かる。多変数の場合も同様、Rockafellar [30] の Theorem 26.5 から、集合 $(0,\infty)^d$ の境界に収束するいかなる点列 $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq (0,\infty)^d$ に対しても、

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{1}\cdot I(y_n) = \infty$$

が成り立つ。次の仮定 6.7 は、この収束が次の意味で「一様」であることを要請する。この仮定は、仮定 6.6 と共に、後の定理 6.11 において用いる。

仮定 6.7. 関数 I は、

$$\underline{\lim}_{m(y)\downarrow 0} \mathbf{1}\cdot I(y) = \sup_{r>0} \inf_{m(y)<r} \mathbf{1}\cdot I(y) = \infty, \tag{6.15}$$

を満たす。但し、$m(y) \triangleq y^1 \wedge \cdots \wedge y^d$ とおいた。

Kamizono[22]の主要結果は、後の 2 つの定理 6.10、6.11 に示すように、Kramkov-Schachermayer [26] が取引コストのない非完備市場の場合に提示した結果 Theorem 2.1 および 2.2 と類似の結果が、取引コストのある市場での多変数効用最大化問題の場合にも成り立つということである。それを見るためには、最適値関数 $V_\cdot$ を、$x\in \operatorname{int} K$ の関数 $x\mapsto V_x$ として全空間 $\operatorname{int} K$ 上で一度に見るのではなく、任意に $x\in\operatorname{int} K$ を固定して、半直線 $\{\alpha x \mid \alpha>0\}$ の上の関数として、$\alpha\mapsto V_x(\alpha)\triangleq V_{\alpha x}$ と見ることが本質的である。言うまでもなく、はじめに固定する x としては、$|x|=1$ とするなど、ノーマライズしておいてよい。そして、任意に固定された $x\in\operatorname{int} K$ に対し、

$$\gamma_{Z,x} \triangleq \mathbb{E}[Z(0)]\cdot x, \quad Z(\cdot)\in \mathrm{M}.$$

とおき、空間 M_x を

$$\mathrm{M}_x \triangleq \left\{ \frac{1}{\gamma_{Z,x}} Z(T) \;\middle|\; Z(\cdot)\in\mathrm{M} \right\} \tag{6.16}$$

で定義する。ここで、M は第 2 節で定義した通り、確率 1 で条件

$$\mathrm{diag}[S(t)]^{-1} Z(t) \in K^* \quad \forall t\in[0,T] \tag{6.17}$$

を満たすような $(0,\infty)^d$ 値のマルチンゲール $\{Z(t)\}_{t\in[0,T]}$ の全体である。ついでに、第 2 節で述べた優ヘッジングに関する Kabanov-Last[20] の定理 4.6 を、本節での記号に合わせて書き直しておく。

定理 6.8 (Kabanov-Last). 仮定 *2.1*、*4.5* のもと、定義 *5.1* の集合 C_x は、

$$\mathrm{C}_x = \left\{ B \in \mathbb{L}^0(\mathbb{R}^d_+) \;\middle|\; \mathbb{E}[Z(T)\cdot B] \le \mathbb{E}[Z(0)]\cdot x, \quad \forall Z(\cdot) \in \mathrm{M} \right\}. \tag{6.18}$$

と表される。

さて、式(6.16) で定義された空間 M_x を用いれば、式(6.18) は

$$\mathrm{C}_x = (\mathrm{M}_x)^\circ \tag{6.19}$$

に他ならない。ここで、一般に集合 $\mathrm{B} \subseteq \mathbb{L}^0(\mathbb{R}^d_+)$ 対し、B° は B の 極集合*(polar set)*

$$\mathrm{B}^\circ \triangleq \{g \in \mathbb{L}^0(\mathbb{R}^d_+) \mid \mathbb{E}[f\cdot g] \le 1, \quad \forall f \in \mathrm{B}\}$$

である。部分ヘッジング問題のときと同様、主問題の双対問題として効用関数の共役関数を目的関数とする最小化問題を考えるが、部分ヘッジング問題のときと全く同じアイディアにしたがい、C_x の極集合

$$(\mathrm{C}_x)^\circ \triangleq \{H \in \mathbb{L}^0(\mathbb{R}^d_+) \mid \mathbb{E}[H\cdot B] \le 1,\ \forall B \in \mathrm{C}_x\} \tag{6.20}$$

を用意する。式(6.19) から、$(\mathrm{C}_x)^\circ = (\mathrm{M}_x)^{\circ\circ} \triangleq ((\mathrm{M}_x)^\circ)^\circ$ がすぐ出るが、Brannath-Schachermayer [1] の双極定理 (bipolar theorem) によれば、$(\mathrm{M}_x)^{\circ\circ}$ は、M_x を含み、確率収束の位相のもとで閉となる最小の凸体 (solid convex set) となる。但し、凸集合 $A \subseteq \mathbb{L}^0(\mathbb{R}^d_+)$ が 凸体*(solid convex set)* であるとは、$f \in A$ と $g \in \mathbb{L}^0(\mathbb{R}^d_+)$ が $g^i \le f^i$, $\forall i = 1,\ldots,d$, a.s. を満たすときにはいつでも $g \in A$ となることを言う。われわれの場合、もとの空間 M に対する条件(6.17) を考慮し、やや小さめの集合

$$\mathrm{D}_x \triangleq \{H \in (\mathrm{C}_x)^\circ \mid \mathrm{diag}[S(T)]^{-1}H \in K^*\} \tag{6.21}$$

を、双対問題の制御変数の空間として用いる。集合 C_x と D_x との間に、以下が成り立つ。

命題 6.9. 任意に $x \in \mathrm{int}\,K$ を固定し、仮定 *2.1* と *4.5* をおく。このとき、

(i) 集合 C_x と D_x は、それぞれ $\mathbb{L}^0(\mathbb{R}^d_+)$ の凸部分集合で確率収束の位相のもとで閉である。また C_x は凸体をなす。

(ii) 確率ベクトル $B,\, H \in \mathbb{L}^0(\mathbb{R}^d_+)$ に対し、それぞれ以下が成り立つ。

(a) $B \in \mathrm{C}_x$ となるための必要十分条件は、$\sup_{H\in\mathrm{D}_x} \mathbb{E}[H \cdot B] \le 1$ が成り立つことである。

(b) $H \in \mathrm{D}_x$ となるための必要十分条件は、$\sup_{B\in\mathrm{C}_x} \mathbb{E}[H{\cdot}B] \le 1$ および $\mathrm{diag}[S(T)]H \in K^*$ が成り立つことである。

(iii) ある適当な定数 $\eta > 0$ が存在し、定ベクトル $\eta\mathbf{1}$ は C_x に属する。ここで、$\mathbf{1} = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^d$ である。

(iv) 集合 D_x は $\mathbb{L}^1(\mathbb{R}^d_+)$ で有界である。

さて、予告していた通り初期保有額ベクトル $x \in \mathrm{int}\, K$ を任意に固定し、もとの効用最大化問題の最適値関数を

$$V_x(\alpha) \triangleq \sup_{B\in\mathrm{C}_x(\alpha)} \mathbb{E}[U(B)], \quad \alpha > 0. \tag{6.22}$$

で定義しなおそう。ただし、変数 $\alpha > 0$ に対し、

$$\mathrm{C}_x(\alpha) \triangleq \alpha\mathrm{C}_x = \mathrm{C}_{\alpha x}$$

とおいた。また、前節で扱った部分ヘッジングの問題と全く同様であるが、式(6.4)、(6.21) から明らかに、

$$\mathbb{E}[U(B)] \le \mathbb{E}[\tilde{U}(\beta H)] + \beta\mathbb{E}[H \cdot B] \le \mathbb{E}[\tilde{U}(\beta H)] + \beta\alpha \tag{6.23}$$

が任意の $\alpha > 0$、$\beta > 0$、$B \in \mathrm{C}_x(\alpha)$ および $H \in \mathrm{D}_x$ について成り立つ。また、$H \in (0, \infty)^d$ a.s. である場合、上式(6.23) の二つの等号は、

$$B = I(\beta H) \quad \text{かつ} \quad \mathbb{E}[H \cdot B] = \alpha$$

のとき、またそのときに限って成立する。また、$\alpha > 0$ を固定すれば、式(6.23) の左辺は $B \in \mathrm{C}_x(\alpha)$ のみに、右辺は $\beta > 0$ と $H \in \mathrm{D}_x$ のみに依存していることから、左辺で $B \in \mathrm{C}_x$ に関する上限、右辺で $H \in \mathrm{D}_x$ と $\beta > 0$ に関する下限をとってもよいことがすぐ分かる。そこで、効用最大化問題の双対問題として最小化問題

所与のベクトル $y \in \mathbb{R}^d$ に対し、共役関数の期待値 $\mathbb{E}[\tilde{U}(H)]$ を $H \in \mathrm{D}_y$ に関し最小化せよ。

を考え、その最適値関数を

(6.24) $$\tilde{V}_x(\beta) \triangleq \inf_{H \in \mathrm{D}_x} \mathbb{E}[\tilde{U}(\beta H)] = \inf_{H \in \mathrm{D}_x(\beta)} \mathbb{E}[\tilde{U}(H)], \quad \beta > 0.$$

とおく。ここで、

$$\mathrm{D}_x(\beta) \triangleq \beta \mathrm{D}_x$$

とおいた。式(6.23) の左辺で $B \in \mathrm{C}_x$ に関する上限、右辺で $H \in \mathrm{D}_x$ と $\beta > 0$ に関する下限をとれば、関数 $\tilde{V}_x(\cdot)$ と $V_x(\cdot)$ との関係、

$$V_x(\alpha) \leq \inf_{\beta > 0} [\tilde{V}_x(\beta) + \beta\alpha]$$

がすぐ出る。ここで実は等号が成り立っていることは、下の定理 6.10 の主張のうちの一つである。

下の定理 6.10 は、Kramkov-Schachermayer [26] の Theorem 2.1 に対応するものである。ここでは漸近弾力性に関する仮定は必要ない。また、特に **(ii)** は、すぐ上で述べたように、もとの効用最大化問題の最適値関数と双対問題の最適値関数とが、互いの共役関数になっていることを主張している。

定理 6.10 (Kamizono). 初期保有額ベクトル $x \in \operatorname{int} K$ を固定する。このとき、仮定 *2.1*、*6.2* および *4.5* のもと、以下が成り立つ。

(i) すべての $\alpha > 0$ に対し $V_x(\alpha) < \infty$ となる。また、ある定数 $\beta_0 > 0$ が存在し、$\beta > \beta_0$ となるすべての β に対し、$\tilde{V}_x(\beta) < \infty$ となる。

(ii) 関数 $V_x(\cdot)$ と $\tilde{V}_x(\cdot)$ とは、互いに共役である。すなわち、

(6.25a) $$\tilde{V}_x(\beta) = \sup_{\alpha > 0} [V_x(\alpha) - \beta\alpha], \quad \beta > 0$$

(6.25b) $$V_x(\alpha) = \inf_{\beta > 0} [\tilde{V}_x(\beta) + \alpha\beta], \quad \alpha > 0.$$

(iii) 関数 $V_x(\cdot)$ は区間 $(0, \infty)$ 上で C^1 級である。関数 $\tilde{V}_x(\cdot)$ は、区間 $\{\beta > 0 \mid \tilde{V}_x(\beta) < \infty\}$ 上で強凸である。また、導関数 $V_x'(\cdot)$ と右導関数 $D^+\tilde{V}_x(\cdot)$ は、それぞれ

(6.26) $$V_x'(0+) \triangleq \lim_{\alpha \downarrow 0} V_x'(\alpha) = \infty \quad \text{および} \quad D^+\tilde{V}_x(\infty) \triangleq \lim_{\beta \to \infty} D^+\tilde{V}_x(\beta) = 0$$

を満たす。

(iv) $\tilde{V}_x(\beta)<\infty$ となるようなすべての $\beta>0$ に対し、式(6.24) に現れる下限を達成する確率ベクトル $\hat{H}\equiv\hat{H}(\beta)\in \mathrm{D}_x$ が唯一つ存在する。

定理 6.10 において、特に **(iv)** は、集合 D_x が $\mathbb{L}^1$ 有界かつ確率収束の位相に関して閉であるという事実に強く依存する。なお、集合 C_x は $\mathbb{L}^1$ 有界ではないため ($\mathbb{L}^1$ 有界性の「共役」は「定数を含むこと」である。命題の 6.9**(iii)**、**(iv)**)、もとの効用最大化問題の解の存在を定理 6.10 の **(iv)** と同様にして直接示すことはできない。このことが、そもそも双対問題を経由することの理由である。この辺りの事情は部分ヘッジング問題のときと全く同様である。

次の定理は、前定理 6.10 の仮定に加え、漸近弾力性の仮定 6.6 および関数 I の境界での挙動に関する仮定 6.7 をおくと、もとの効用最大化問題の解の存在が云えることを主張している。なお、定理 6.10 と 6.11 の両定理とも、証明は、Kamizono[22] Section 6 参照。

定理 6.11 (Kamizono). 初期保有額ベクトル $x\in\operatorname{int}K$ を固定する。このとき、仮定 *2.1*、*6.2*、*4.5*、*6.6* および *6.7* のもと、定理 *6.10* に加え、さらに以下が成り立つ。

(i) すべての $\beta>0$ に対し、$\tilde{V}_x(\beta)<\infty$ となる。

(ii) 関数 $\tilde{V}_x(\cdot)$ は、区間 $(0,\infty)$ 上で C^1 級である。関数 $V_x(\cdot)$ は区間 $(0,\infty)$ 上で強凸である。また、導関数 $V_x'(\cdot)$ と $\tilde{V}_x'(\cdot)$ は、それぞれ

$$V_x'(\infty)\triangleq\lim_{\alpha\to\infty}V_x'(\alpha)=0 \quad \text{および} \quad -\tilde{V}_x'(0+)\triangleq-\lim_{\beta\downarrow 0}\tilde{V}_x'(\beta)=\infty \tag{6.27}$$

を満たす。

(iii) $-\hat{\beta}_\alpha\tilde{V}_x'(\hat{\beta}_\alpha)=\alpha$ を満たすような実数 $\hat{\beta}_\alpha>0$ が、各 $\alpha>0$ に対し存在し、確率ベクトル $\hat{B}(\alpha)\triangleq I(\hat{\beta}_\alpha\hat{H}(\hat{\beta}_\alpha))$ は、式(6.22) に現れる上限を達成する唯一つの確率ベクトルとなる。確率ベクトル $\hat{B}(\alpha)$ と $\hat{H}(\hat{\beta}_\alpha)$ との間には、

$$\mathbb{E}\big[\hat{B}(\alpha)\cdot\hat{\beta}_\alpha\hat{H}(\hat{\beta}_\alpha)\big]=\alpha\hat{\beta}_\alpha \tag{6.28}$$

が成り立つ。

(iv) 最適値関数の導関数 $V_x'(\cdot)$ および $\tilde{V}_x'(\cdot)$ は、目的関数の導関数 $\nabla U(\cdot)$ および $\nabla\tilde{U}(\cdot)$ と、それぞれ

$$V_x'(\alpha)=\mathbb{E}\Big[\frac{\hat{B}(\alpha)\cdot\nabla U(\hat{B}(\alpha))}{\alpha}\Big] \quad \text{および} \quad \tilde{V}_x'(\beta)=\mathbb{E}\Big[\frac{\beta\hat{H}(\beta)\cdot\nabla\tilde{U}(\beta\hat{H}(\beta))}{\beta}\Big]$$

によって結びつけられる。

参考文献

[1] Brannath, W., Schachermayer, W. (1999): "A Bipolar Theorem for Subsets of $\mathbb{L}^0_+(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$," in Séminaire de Probabilités, XXXIII (Lecture Notes in Math. **1709**) Springer, Berlin, 349–354.

[2] Bouchard, B. (2001): "Utility Maximization on the Real Line under Proportional Transaction Costs." Preprint.

[3] Bouchard, B., Touzi, N. (2000): "Explicit Solution to the Multivariate Super-Replication Problem under Transaction Costs." Ann. Appl. Probab. **10**(3), 685–708.

[4] Cvitanić, J. (2000): "Minimizing Expected Loss of Hedging in Incomplete and Constrained Markets." SIAM J. Control Optim. **38**(4), 1050–1066.

[5] Cvitanić, J., Karatzas, I. (1992): "Convex Duality in Constrained Portfolio Optimization." Ann. Appl. Probab. **2**(4), 767–818.

[6] Cvitanić, J., Karatzas, I. (1993): "Hedging Contingent Claims with Constrained Portfolios." Ann. Appl. Probab. **3**(3), 652–681.

[7] Cvitanić, J., Karatzas, I. (1996): "Hedging and Portfolio Optimization under Transaction Costs: A Martingale Approach." Math. Finance, **6**(2), 133–165.

[8] Cvitanić, J., Karatzas, I. (1999): "On Dynamic Measures of Risk." Finance Stoch. **3**(4), 451–482.

[9] Davis, M. H. A., Clark, J. M. C. (1994): "A Note on Super-Replicating Strategies." Phil. Trans. R. Soc. Lond. A, **347**, 485–494.

[10] Davis, M. H. A., Norman, A. R. (1990): "Portfolio Selection with Transaction Costs." Math. Oper. Res. **15**(4), 676–713.

[11] Deelstra, G., Pham, H., Touzi, N. (2000): "Dual Formulation of the Utility Maximization Problem under Transaction Costs." Preprint.

[12] Delbaen, D. and Schachermayer, W. (1994): “A General Version of the Fundamental Theorem of Asset Pricing.” Math. Ann. **300**, 463–520.

[13] Delbaen, D. and Schachermayer, W. (1998): “The Fundamental Theorem of Asset Pricing for Unbounded Stochastic Processes.” Math. Ann. **312**, 215–250.

[14] Föllmer, H., Leukert, P. (1999): “Quantile Hedging.” Finance Stoch. **3**(3), 251–473.

[15] Föllmer, H., Leukert, P. (2000): “Efficient Hedging: Cost versus Shortfall Risk.” Finance Stoch. **4**(2), 117–146.

[16] Hanoch, G. (1977): “Risk Aversion and Consumer Preferences.” Econometrica, **45**(2), 413–426.

[17] Harrison, J. M., Pliska, S. (1981): “Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading.” Stochastic Process. Appl. **11**(3), 215–260.

[18] Jouini, E., Kallal, H. (1995): “Martingales and Arbitrage in Securities Markets with Transaction Costs.” J. Econ. Theory, **66**(3), 178–197.

[19] Kabanov, Y. (1999): “Hedging and Liquidation under Transaction Costs in Currency Markets.” Finance Stoch. **3**(2), 237–248.

[20] Kabanov, Y., Last, G.: “Hedging under Transaction Costs in Currency Markets: A Continuous-time Model.” Preprint.

[21] Kamizono, K. (2001): *Hedging and Optimization under Transaction Costs.* Doctoral Dissertation, Columbia University.

[22] Kamizono, K. (2001): “Multivariate Utility Maximization under Transaction Costs.” Preprint.

[23] Karatzas, I. (1997): “Adaptive Control of a Diffusion to a Goal and a Parabolic Monge-Ampère-Type Equation.” Asian J. Math. **1**(2), 295–313.

[24] Karatzas, I., Shreve, S. E. (1991) *Brownian Motion and Stochastic Calculus, 2nd ed.* Springer, New York, 1991.

[25] Karatzas, I., Shreve, S.: *Methods of Mathematical Finance.* Springer, New York, 1998.

[26] Kramkov, D., Schachermayer, W. (1999): "The Asymptotic Elasticity of Utility Functions and Optimal Investment in Incomplete Markets." Ann. Appl. Probab. **9**(3), 904–950.

[27] Kusuoka, S. (1995): "Limit Theorem on Option Replication Cost with Transaction Costs." Ann. Appl. Probab. **5**(1), 198-221.

[28] Lakner, P. (1989): *Consumption/Investment and Equilibrium in the Presence of Several Commodities.* Doctoral Dissertation, Columbia University.

[29] Protter, P.: *Stochastic Integration and Differential Equations.* Springer, New York, 1990.

[30] Rockafellar, T.: *Convex Analysis.* Princeton University Press, Princeton, 1970.

[31] Schwartz, M.: (1986): "New Proofs of a Theorem of Komlós." Acta Math. Hungar. **47**(1-2), 181–185.

[32] Shreve, S. E., Soner, H. M. (1994): "Optimal Investment and Consumption with Transaction Costs." Ann. Appl. Probab. **4**(3), 609–692.

[33] Soner, H. M., Shreve, S. E., Cvitanić, J. (1995): "There Is No Nontrivial Hedging Portfolio for Option Pricing with Transaction Costs." Ann. Appl. Probab. **5**(2), 327–355.

[34] Spivak G., Cvitanić, J. (1999): "Maximizing the Probability of a Perfect Hedge." Ann. Appl. Probab. **9**(4), 1303–1328.

[35] Zariphopoulou, T. (1999): *Transaction Costs in Portfolio Management and Derivative Pricing*, in Introduction to Mathematical Finance (San Diego, CA, 1997), 101–163, American Mathematical Society, Providence, 1999.